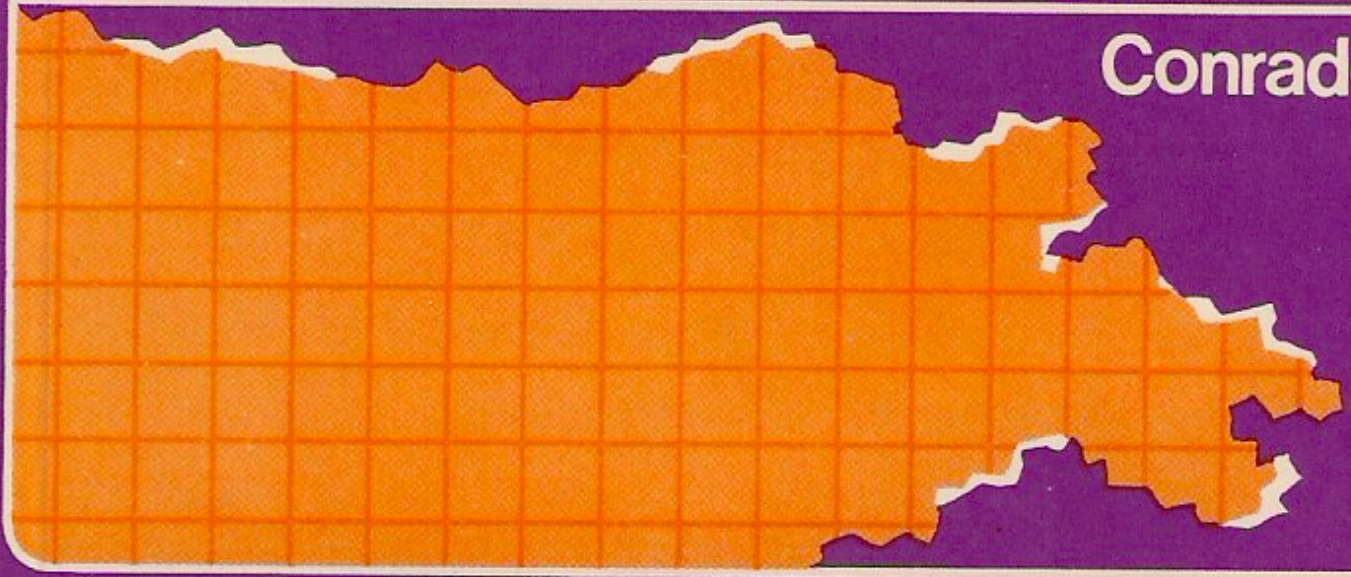
Módulos de matemáticas

Memo 6

GEOMETRÍA ANALÍTICA



Conrado Flores García

trillas

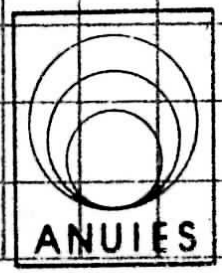
Los *Memos* de la Serie Módulos de Matemáticas constituyen un compendio de los módulos didácticos de que está compuesta esta serie. Su propósito es servir a los estudiantes como una especie de "apunte" en el que podrán encontrar rápidamente, en forma resumida, la información relevante de un tema en particular. Esto, como todos ellos saben, es una valiosa ayuda para preparar exámenes, como recordatorio y como apoyo y refuerzo de lo que han aprendido en el aula.

El tamaño de estos *Memos* no podría ser más práctico: se puede llevar cómodamente en el bolsillo del pantalón o en el bolso de mano. La intención es que los estudiantes los lleven consigo a todas partes para que puedan consultarlos en el momento que lo deseen.

J.M. ALEMÁN.LIBROS
Tlf. / Fax: 928 35 18 62
Móvil: 666 387 989

GEOMETRÍA ANALÍTICA

26x20



Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior

Memo 6
GEOMETRÍA ANALÍTICA

Módulos de matemáticas

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, España
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: Myriam P. Acuña Monsalve
Licenciada en economía,
Universidad Nacional Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
MEMO 6. GEOMETRÍA ANALÍTICA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1986, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1986*
ISBN 968-24-1758-9

Impreso en México

Presentación

La serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, y cada uno de éstos se complementa con un MEMO; por tanto, la serie comprende 8 memos, a saber:

Memo 1. Álgebra (estructura y operaciones)
Memo 2. Álgebra (modelos)
Memo 3. Nociones de lógica matemática
Memo 4. Geometría euclidiana
Memo 5. Trigonometría
Memo 6. Geometría analítica
Memo 7. Cálculo diferencial
Memo 8. Cálculo integral

Cada MEMO es un compendio de la información contenida en los módulos didácticos de cada bloque y constituye un apoyo ideal para los estudiosos de esta disciplina, pues proporciona las fórmulas y los conceptos fundamentales de cada tema. Se trata de un material de consulta cuya estructura y organización permiten la rápida identificación de los procedimientos matemáticos de solución a problemas.

Hemos designado este material con el nombre de MEMO, porque es una ayuda a la ***memoria,*** al entusiasmo y al esfuerzo.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

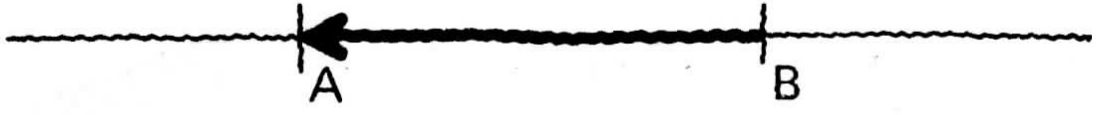
1. Introducción a la geometría analítica 9
2. La recta 33
3. La circunferencia 43
4. La elipse 59
5. La hipérbola 81
6. La parábola 107
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado 125
8. Relaciones y lugares geométricos 141

1. Introducción a la Geometría Analítica

Si A y B son dos números reales cualesquiera,
la **distancia dirigida** de A a B

es igual a $\boxed{B - A}$

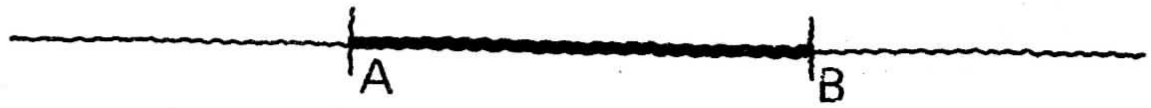
y se simboliza así $\boxed{|\overrightarrow{AB}|}$



Si A y B son dos números reales cualesquiera,
la **distancia dirigida** de B a A

es igual a $\boxed{A - B}$

y se simboliza así $\boxed{|\overrightarrow{BA}|}$



La **distancia** de A a B ó de B a A

es igual a $\boxed{|B - A| = |A - B|}$

y la simbolizamos así $\boxed{|\overleftrightarrow{AB}|}$ o así $\boxed{|\overleftrightarrow{BA}|}$.

Es la medida del segmento rectilíneo $\overleftrightarrow{AB}$ ó $\overleftrightarrow{BA}$.

Distancia dirigida de x_A a x_B:

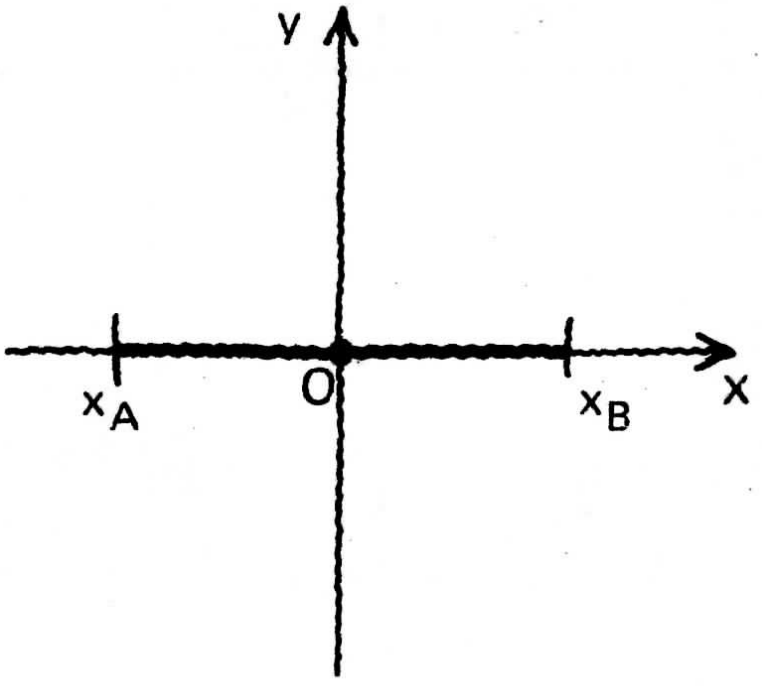
- $|\overrightarrow{x_A\ x_B}| = x_B - x_A$

Distancia dirigida de $x_B - x_A$:

- $|\overrightarrow{x_B\ x_A}| = x_A - x_B$

Distancia de x_A a x_B
o de x_B a x_A:

- $|\overline{x_A\ x_B}| = |\overline{x_B\ x_A}|$
  $= |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$



Distancia dirigida de y_A a y_B:

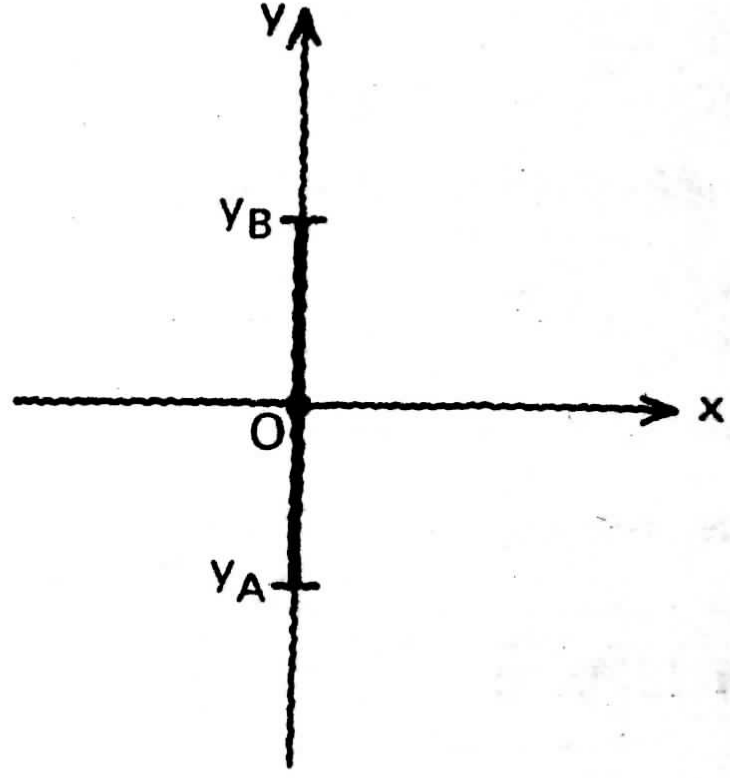
- $|\overrightarrow{y_A\ y_B}| = y_B - y_A$

Distancia dirigida de y_B a y_A:

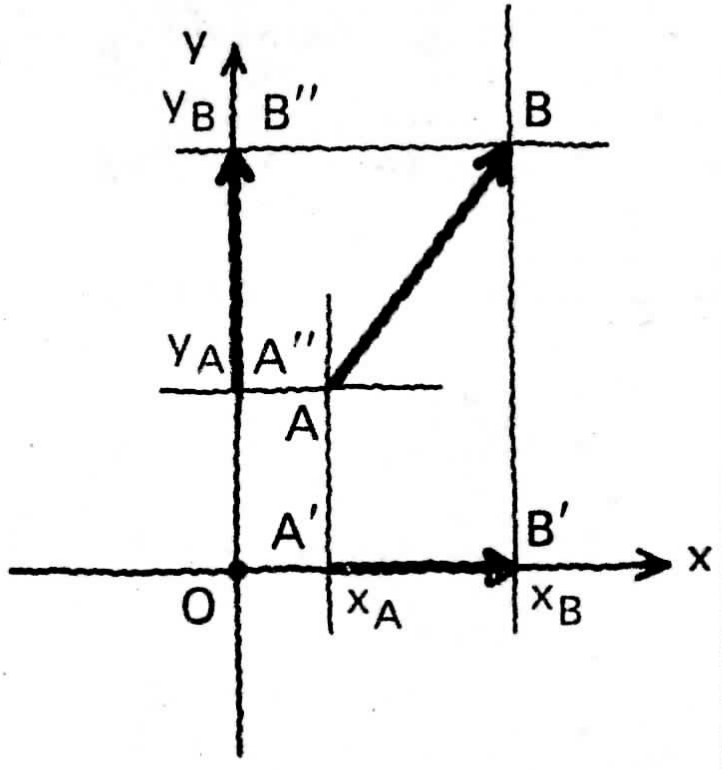
- $|\overrightarrow{y_B\ y_A}| = y_A - y_B$

Distancia de y_A a y_B
o de y_B a y_A:

- $|\overline{y_A\ y_B}| = |\overline{y_B\ y_A}|$
$= |y_B - y_A| = |y_A - y_B|$



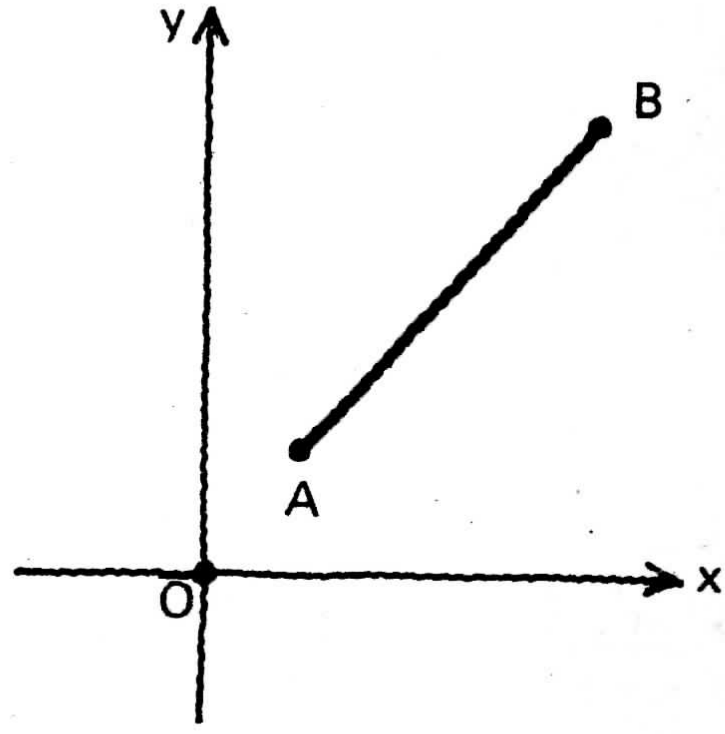
- $\overrightarrow{A'B'}$ es la **proyección en x** del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$.
- $\boxed{|\overrightarrow{A'B'}| = x_B - x_A}$
- $A''B''$ es la **proyección en y** del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$.
- $\boxed{|\overrightarrow{A''B''}| = y_B - y_A}$



Distancia de A a B
(o de B a A)
o
distancia entre A y B
es
la medida del segmento

no dirigido $\overline{AB}$
y se simboliza así

$|\overline{AB}|$.



- $\overline{A'B'}$ es la **proyección en x**

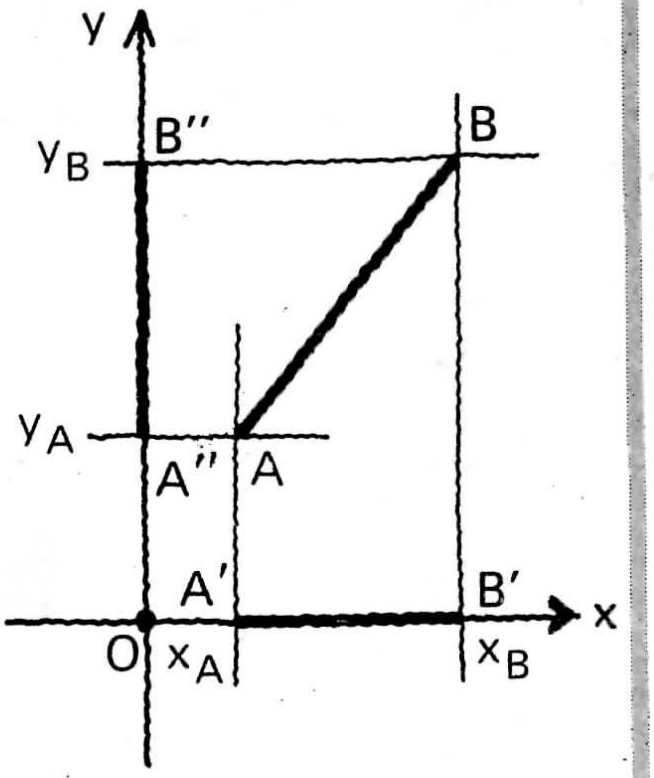
del segmento no dirigido $\overline{AB}$.

- $\boxed{|\overline{A'B'}| = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|}$

- $\overline{A''B''}$ es la **proyección en y**

del segmento no dirigido $\overline{AB}$

- $\boxed{|\overline{A''B''}| = |y_B - y_A| = |y_A - y_B|}$

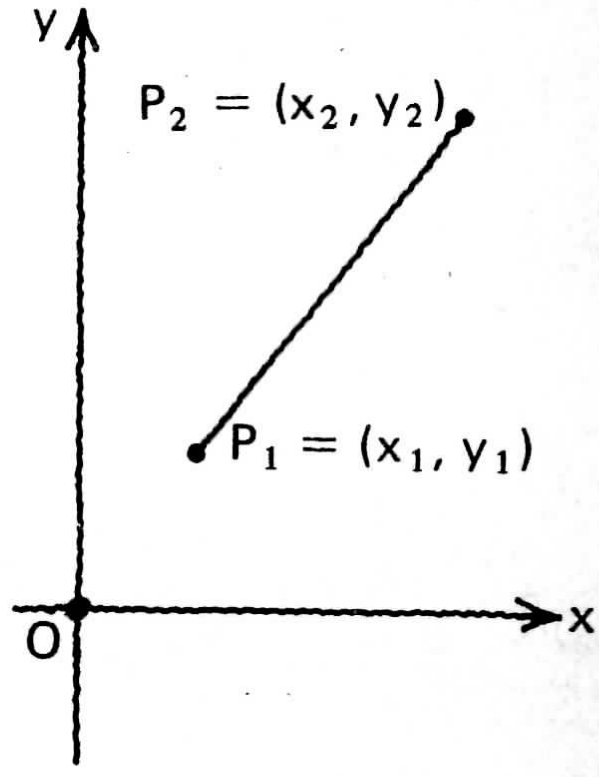


La distancia entre los puntos
$P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$
está dada por:

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{R}$

En esta expresión pueden intercambiarse los índices de la variables x e y.



Consideremos
el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$
tal que:

$|\overrightarrow{AB}| = |d|$

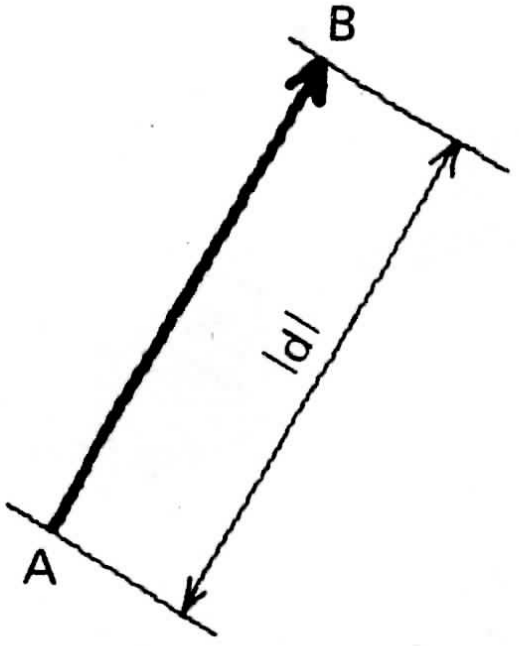
y

convengamos en que:

si $|\overrightarrow{AB}| = d$

entonces $|\overrightarrow{BA}| = -d$

$d \in \mathcal{R}$

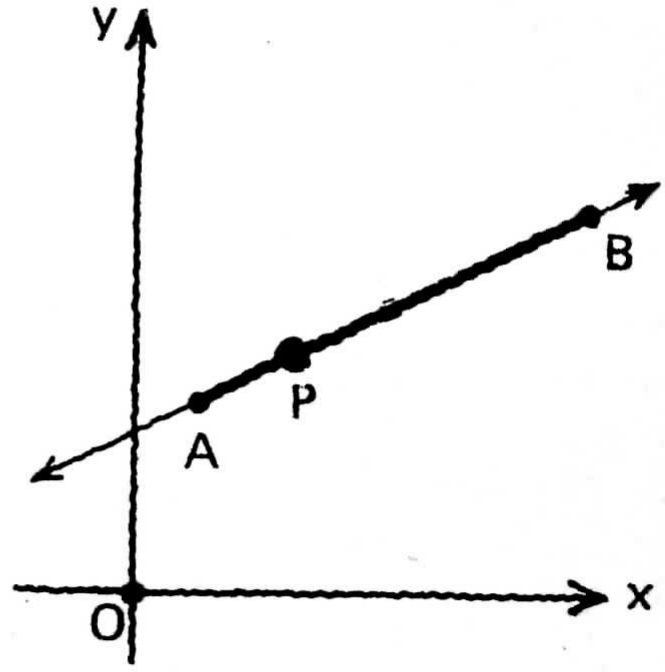


$A = (x_A, y_A)$
y
$B = (x_B, y_B)$
definen el segmento rectilíneo
$\overrightarrow{AB}$, y
$P = (x_P, y_P)$ está en la
recta AB.
Definimos:

$$r = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$$

y decimos que:

"P divide al segmento $\overrightarrow{AB}$
según la razón r".



$A = (x_A, y_A)$

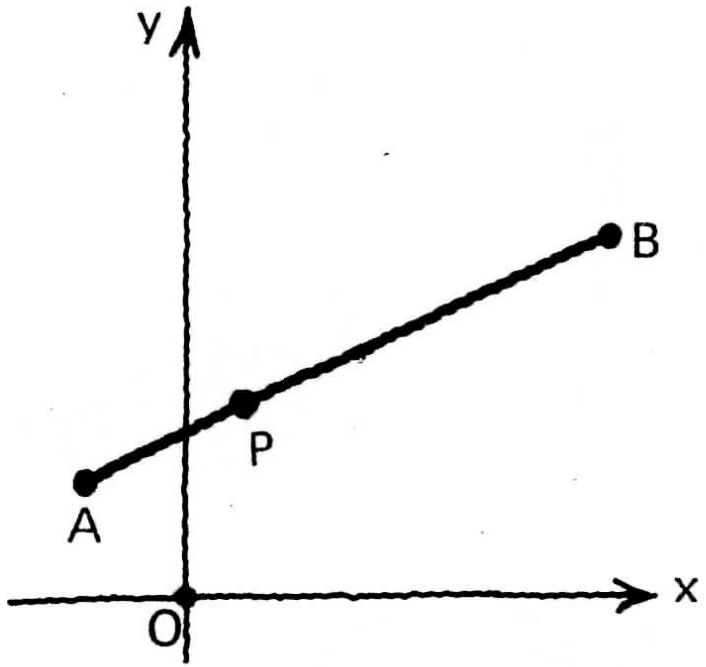
$B = (x_B, y_B)$

$P = (x_P, y_P)$

- $r = \dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ • $r \neq -1$

$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

$$y_P = \frac{y_A + ry_B}{1 + r}$$

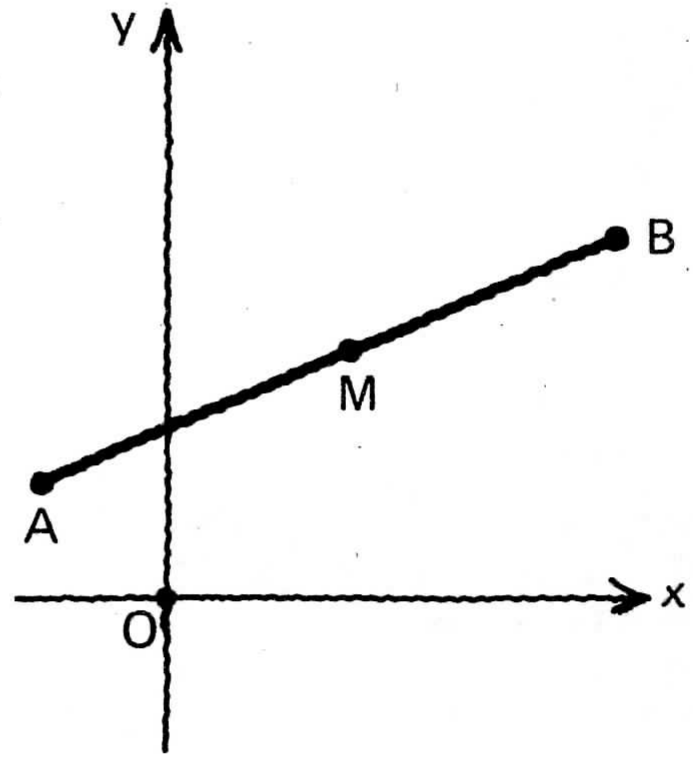


Si M es el punto medio de $\overline{AB}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$x_A, x_B, y_A, y_B \in \mathcal{R}$



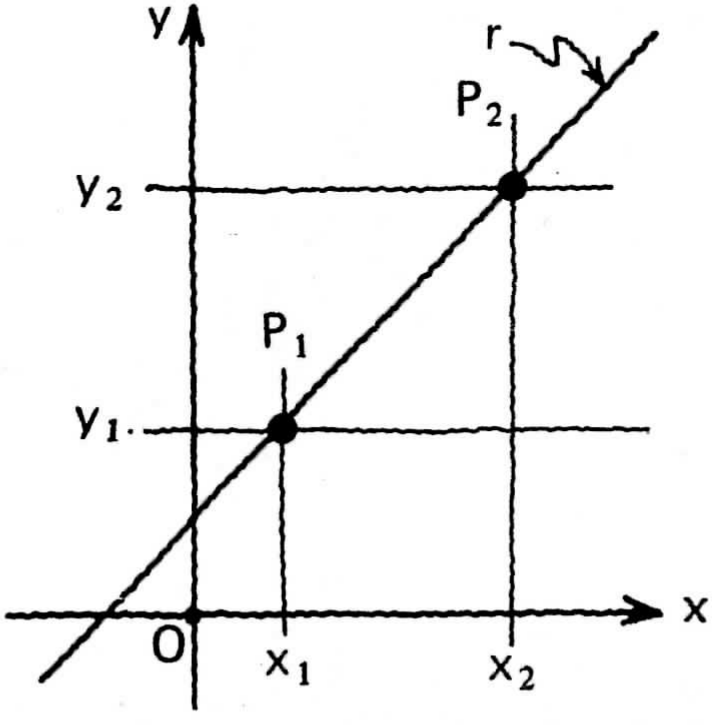
Sea r una recta, y
$P_1 = (x_1, y_1)$
$P_2 = (x_2, y_2)$

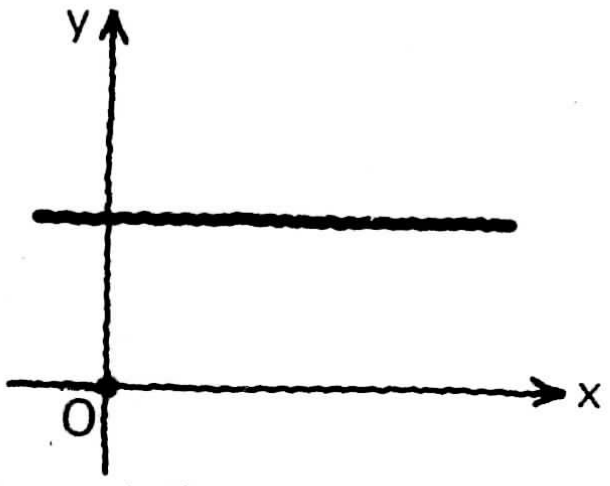
dos puntos distintos pertenecientes a ella.
Definimos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

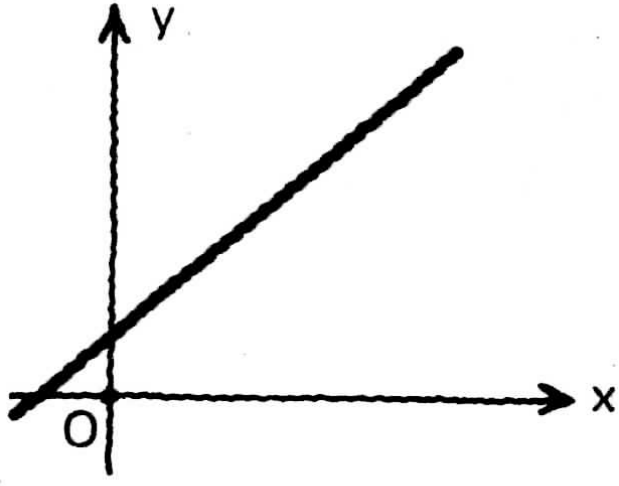
$x_1 \neq x_2$

en que
m es la **pendiente** de la recta r.

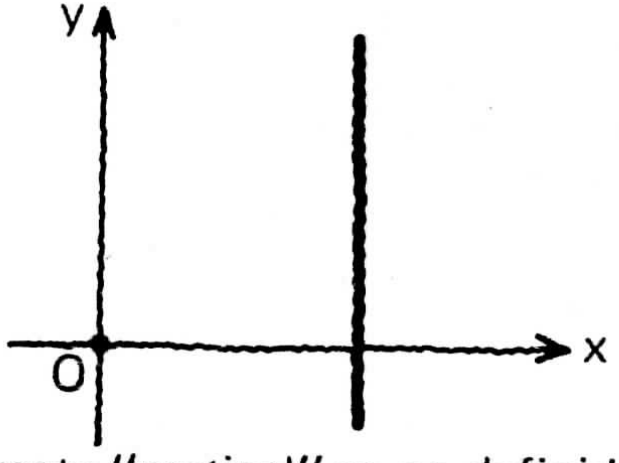




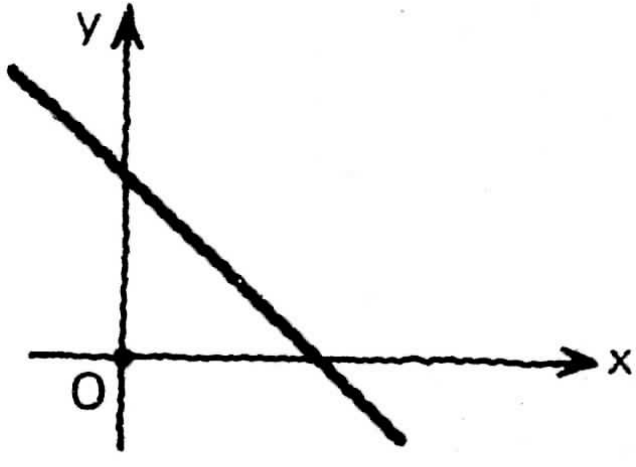
● recta "horizontal" **m = 0**



● recta "creciente" **m > 0**

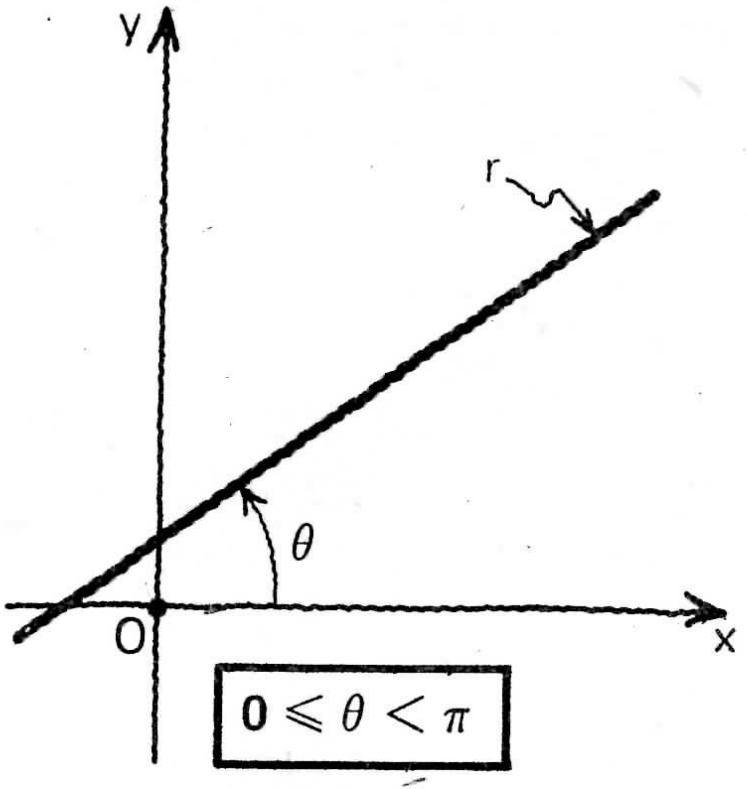


● recta "vertical" **m** no definida



● recta "decreciente" **m < 0**

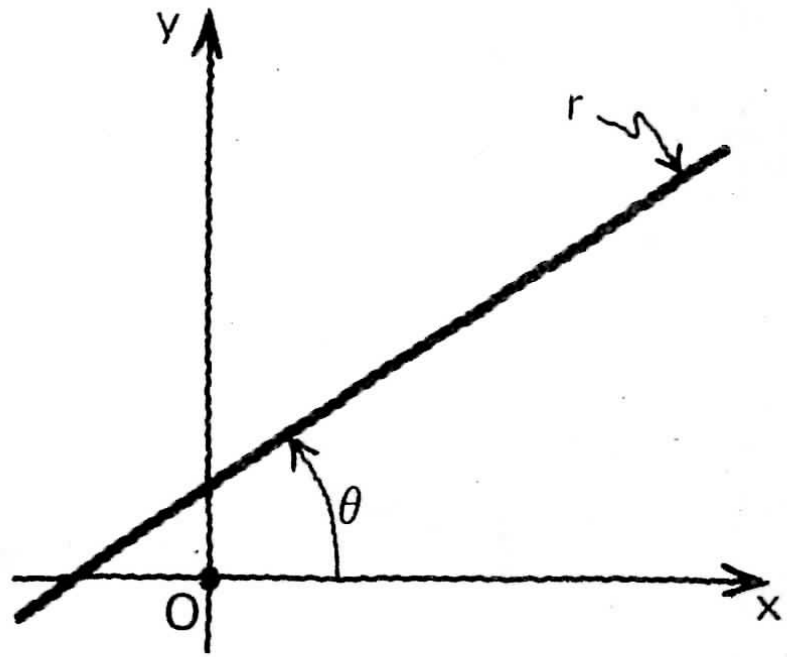
Ángulo de inclinación
de una recta
es el que forma la recta con
el eje de las x, midiéndose
convencionalmente en sentido
contrario al de las manecillas del
reloj y tomando como "lado inicial" el
rayo
$\overrightarrow{0x}$.

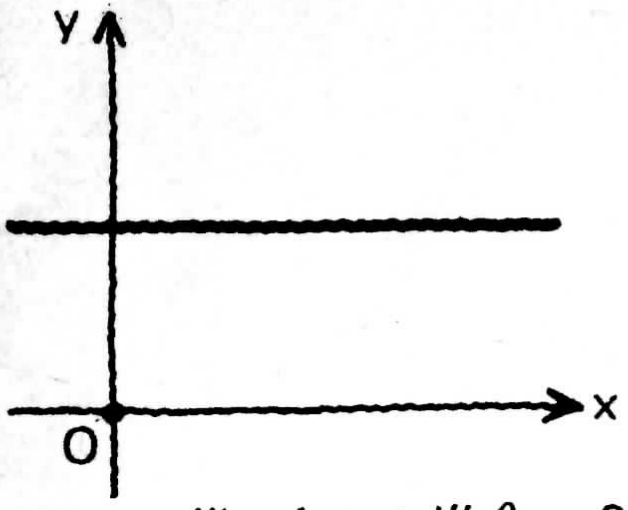


La pendiente de una recta
es igual a
la
tangente trigonométrica
de su
ángulo de inclinación .
Es decir que:

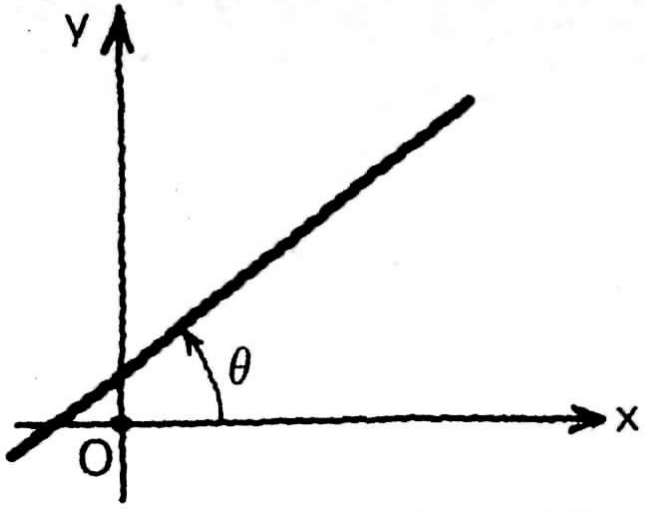
$$m = \tan \theta$$

$0 \leqslant \theta < \pi$

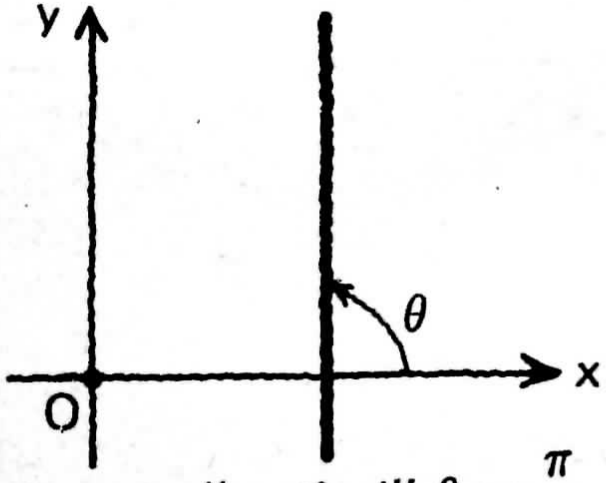




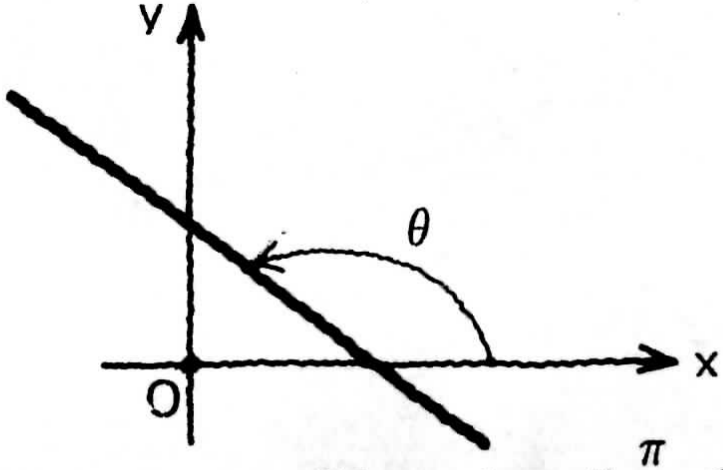
- recta "horizontal" $\theta = 0$



- recta "creciente" $0 < \theta < \pi/2$



- recta "vertical" $\theta = \frac{\pi}{2}$



- recta "decreciente" $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

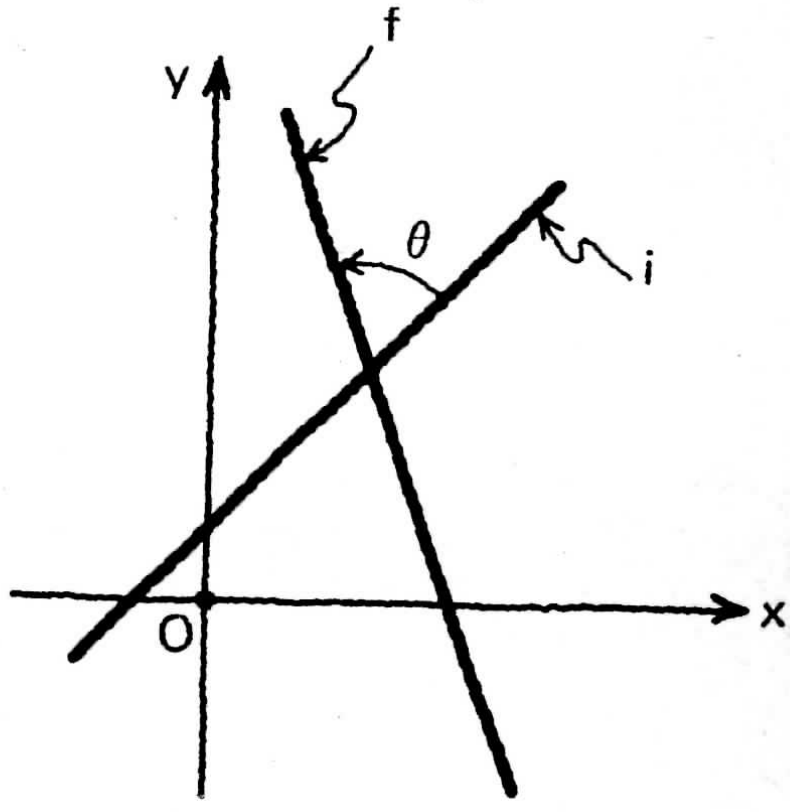
$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$$

$m_i, m_f \in \mathbb{R}$

$m_f \cdot m_i \neq -1$

$0 \leqslant \theta < \pi$

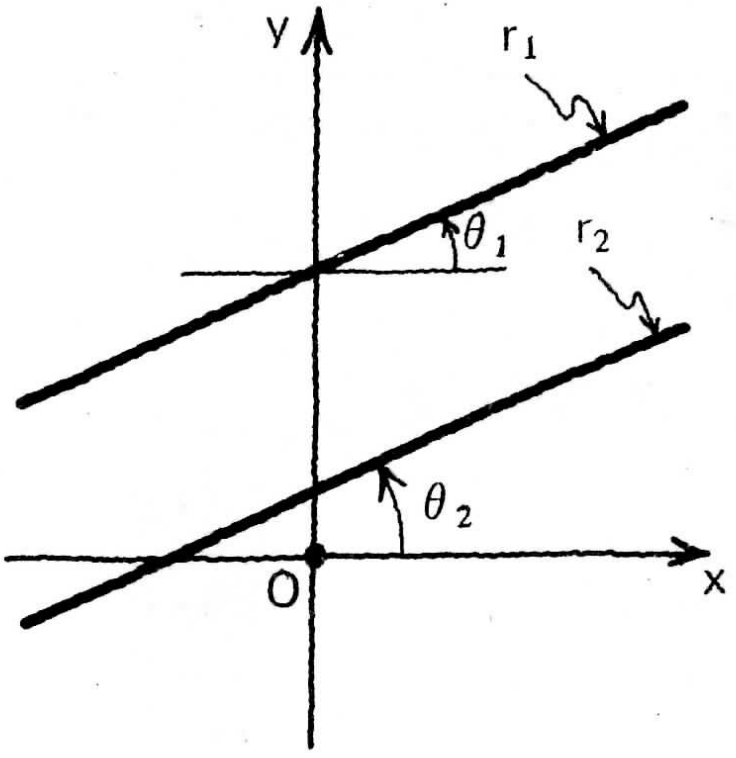
$$\theta = \arctan \frac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$$



Dos rectas son **paralelas**
si, y sólo si
sus **pendientes** son **iguales**
o si, y sólo si
las medidas de sus
ángulos de inclinación
son iguales

$$r_1 \parallel r_2 \iff m_1 = m_2$$

$$r_1 \parallel r_2 \iff \measuredangle\, \theta_1 = \measuredangle\, \theta_2$$



Para que los tres **puntos**

$P_1 = (x_1, y_1)$
$P_2 = (x_2, y_2)$
$P_3 = (x_3, y_3)$

sean **colineales**

se requiere que:

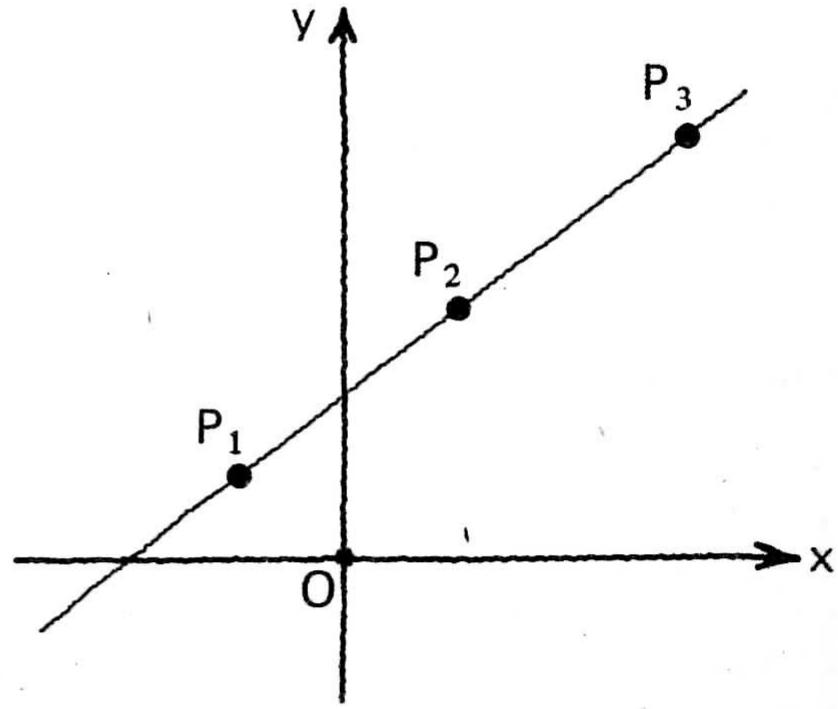
$$\boxed{m_{1,2} = m_{2,3}}$$

o

$$\boxed{m_{1,3} = m_{1,2}}$$

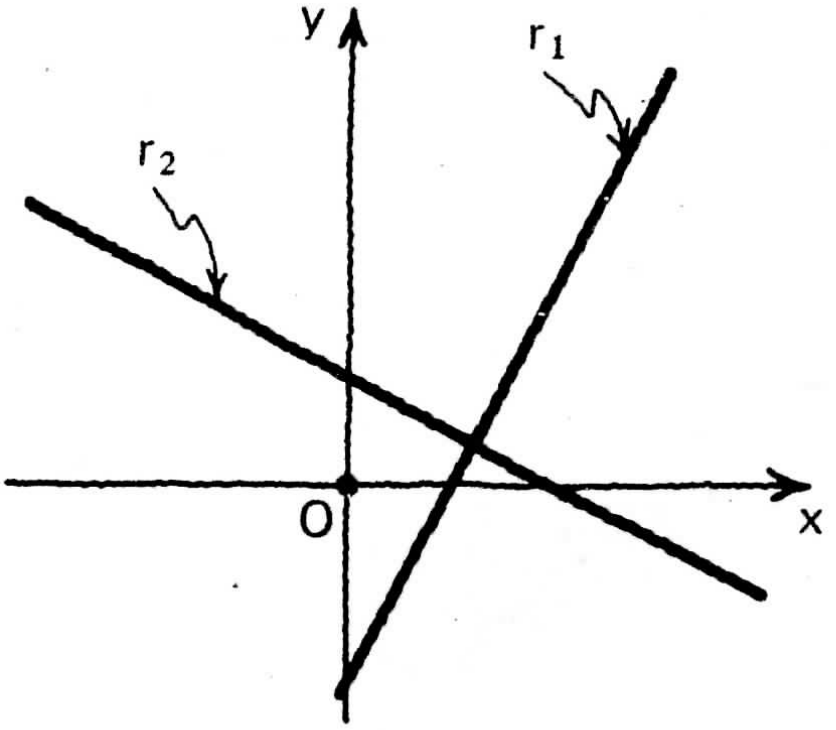
o

$$\boxed{m_{1,3} = m_{2,3}}$$



Dos rectas son **perpendiculares** si, y sólo si sus pendientes son **recíprocas y de signo contrario.**
Esto puede expresarse así:

$$r_1 \perp r_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$$



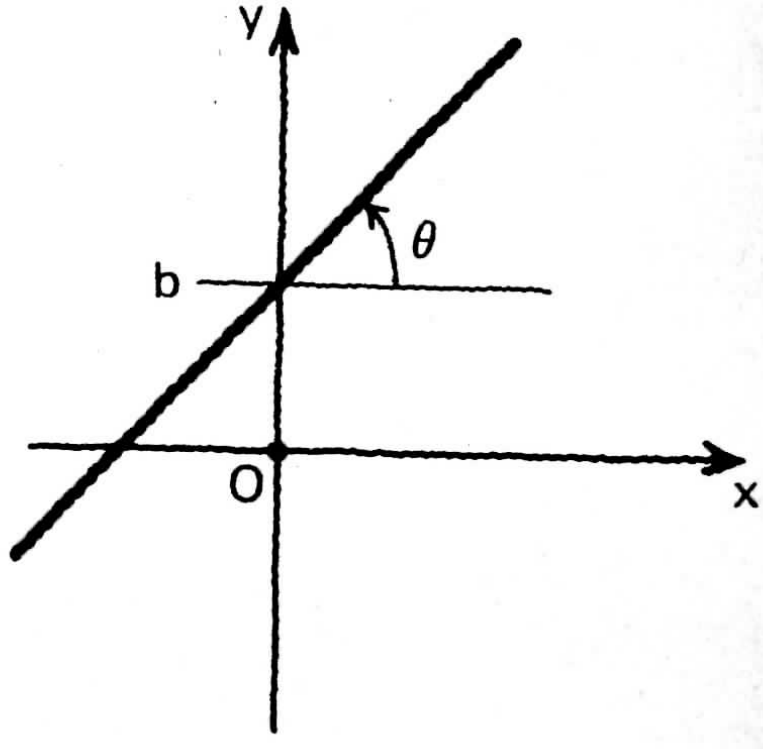
2. La recta

Ecuación de la recta
"pendiente-ordenada al origen"

$$y = mx + b$$

$m, b \in \mathbb{R}$

- **m** $= \tan\theta$ es la pendiente
- **b** es la ordenada al origen

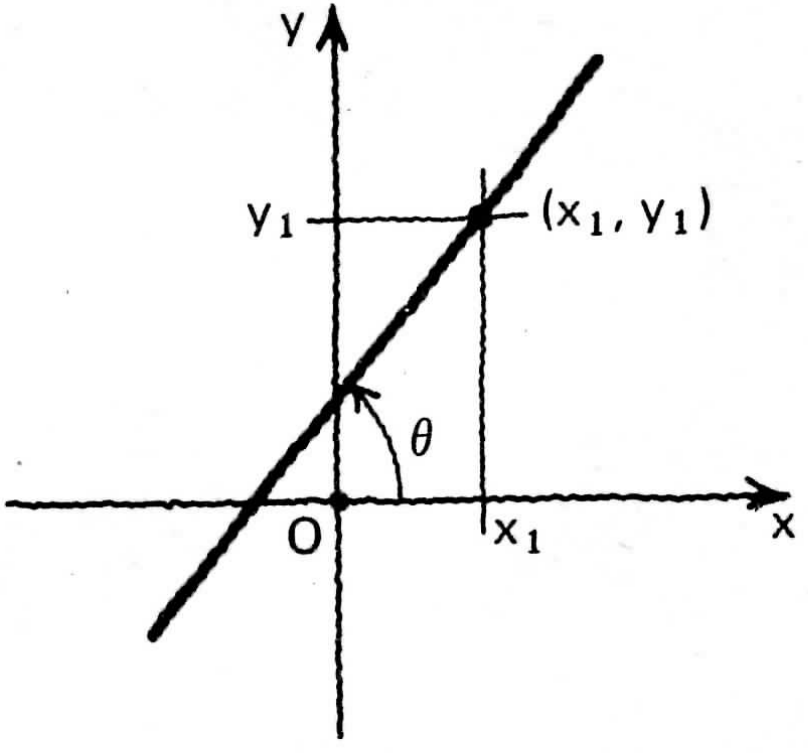


Ecuación de la recta "pendiente-punto"

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$m, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

- $m = \tan\theta$ es la pendiente
- (x_1, y_1) es un punto perteneciente a la recta

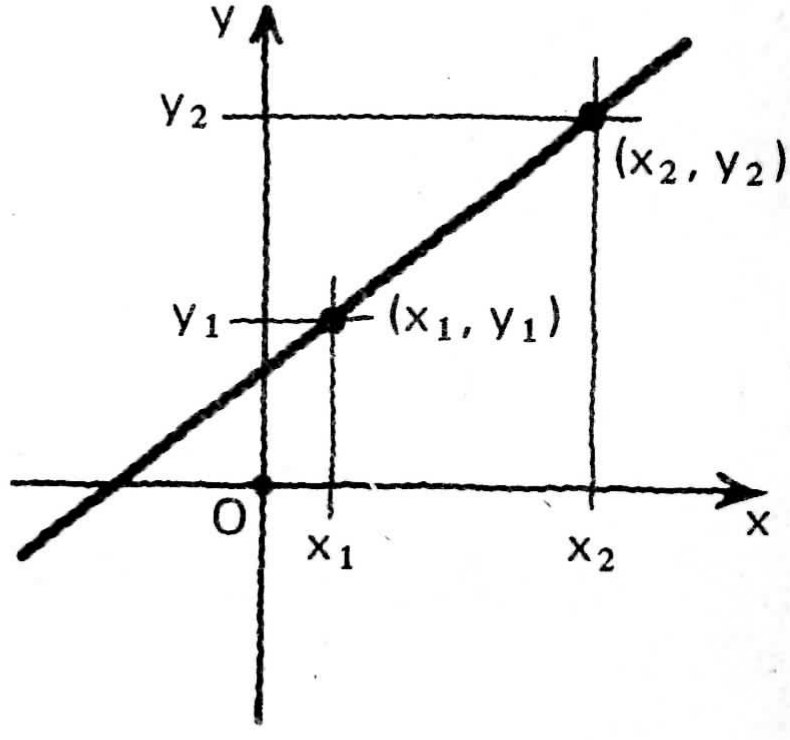


Ecuación de la recta "dos puntos"

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2$

- (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos pertenecientes a la recta.

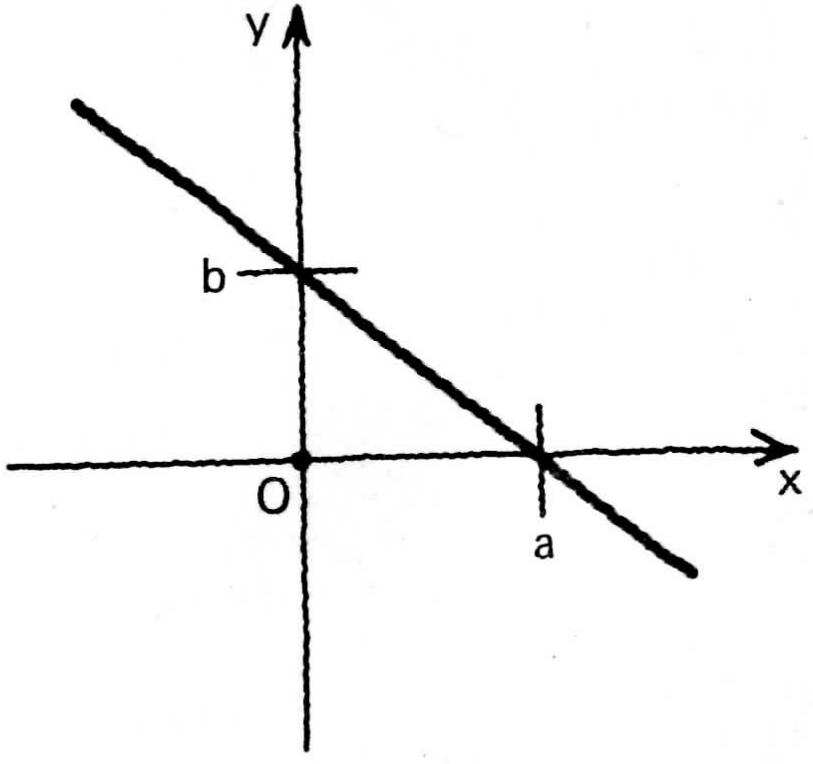


Ecuación "simétrica" de la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a, b \in \mathbb{R} \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$

- a y b son las intersecciones
- a es la abscisa al origen
- b es la ordenada al origen

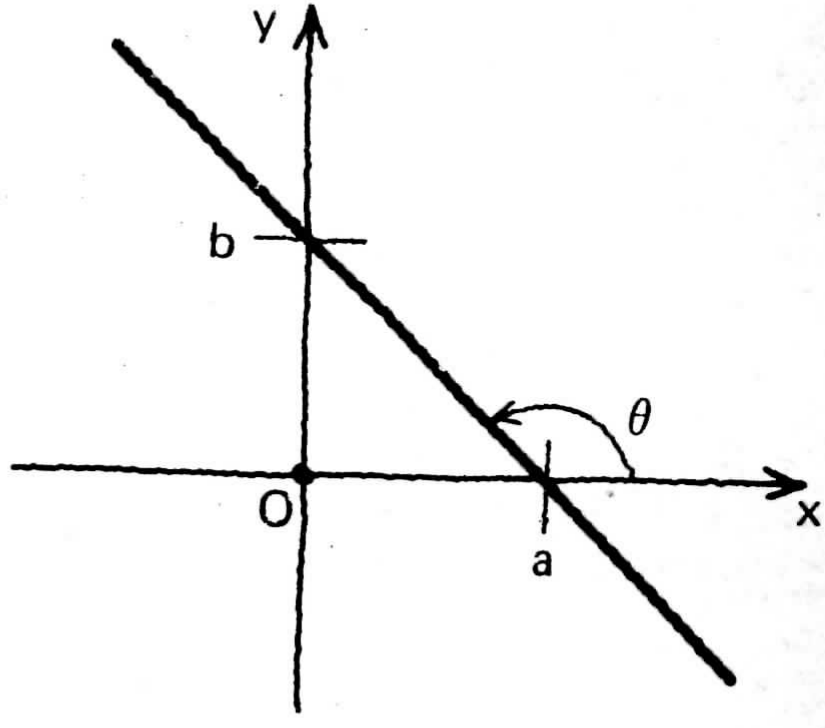


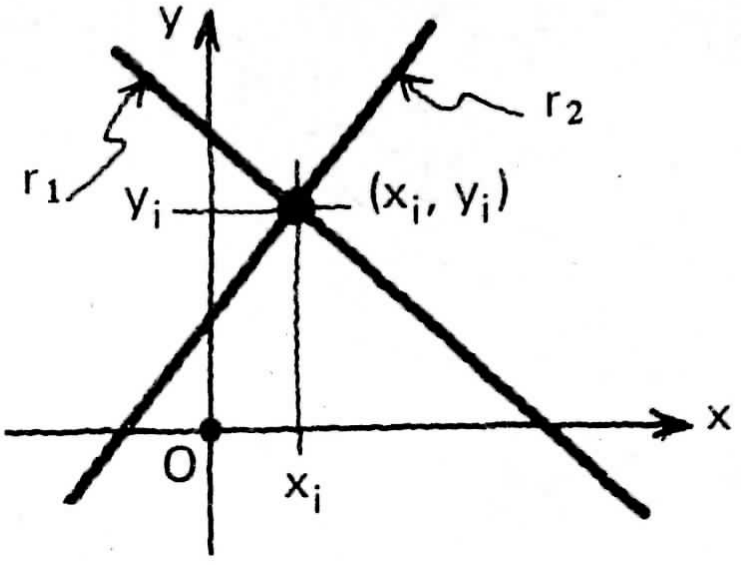
Ecuación general de la recta.

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

$A, B, C \in \mathbb{R} \wedge \sim (A = 0 \wedge B = 0)$

- $m = \tan\theta = -\dfrac{A}{B}$
- $a = -\dfrac{C}{A}$
- $b = -\dfrac{C}{B}$





Si $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
es una ecuación de la recta r_1
y $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$
es una ecuación de la recta r_2,
el conjunto solución del sistema:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \wedge A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

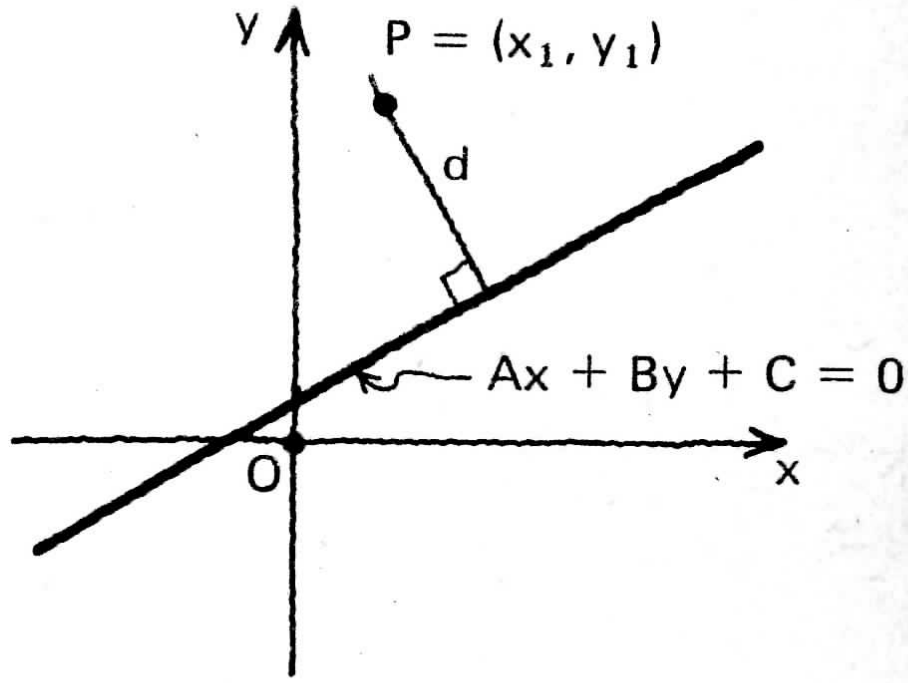
es

$$r_1 \cap r_2 = \{(x_i, y_i)\}$$

La **distancia del punto**
$P = (x_1, y_1)$
a la recta
$Ax + By + C = 0$
está dada por la expresión:

$$\mathbf{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

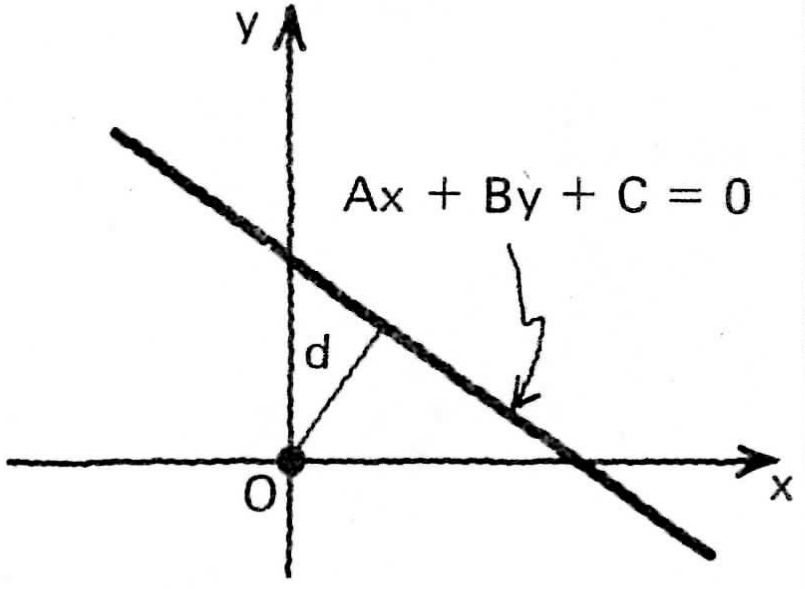
$A, B, C \in \mathbb{R} \wedge A$ y B no siendo simultáneamente iguales a cero.



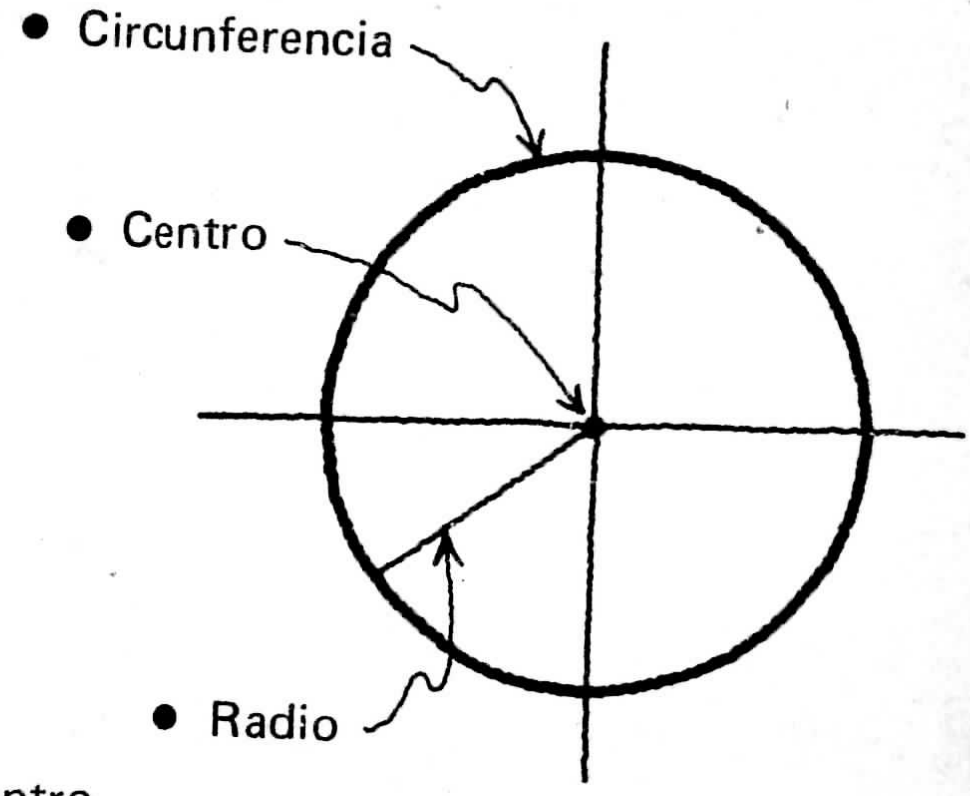
La **distancia del origen**
$O = (0, 0)$
a la recta
$Ax + By + C = 0$
está dada por la expresión

$$\mathbf{d} = \frac{|C|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}}$$

$A, B, C \in \mathcal{R} \wedge \sim (A = 0 \wedge B = 0)$



3. La circunferencia

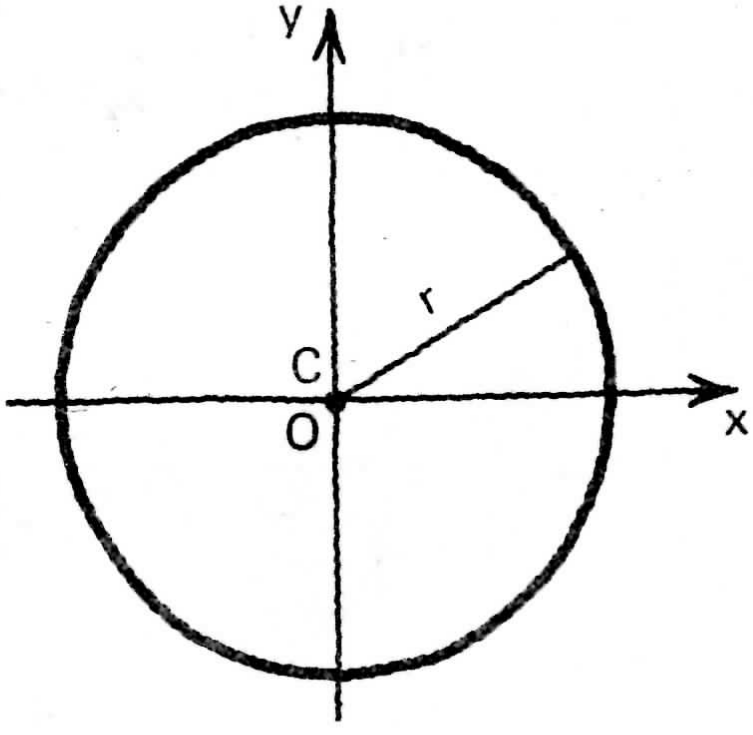


Circunferencia
es un conjunto
de puntos
en el plano,
que equidistan
de un punto fijo.
Llamamos **centro**
al punto fijo
y **radio**
a la distancia constante del centro
a un punto cualquiera de la circunferencia.

Ecuación
de una **circunferencia**
de radio **r,**
con centro en el origen.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

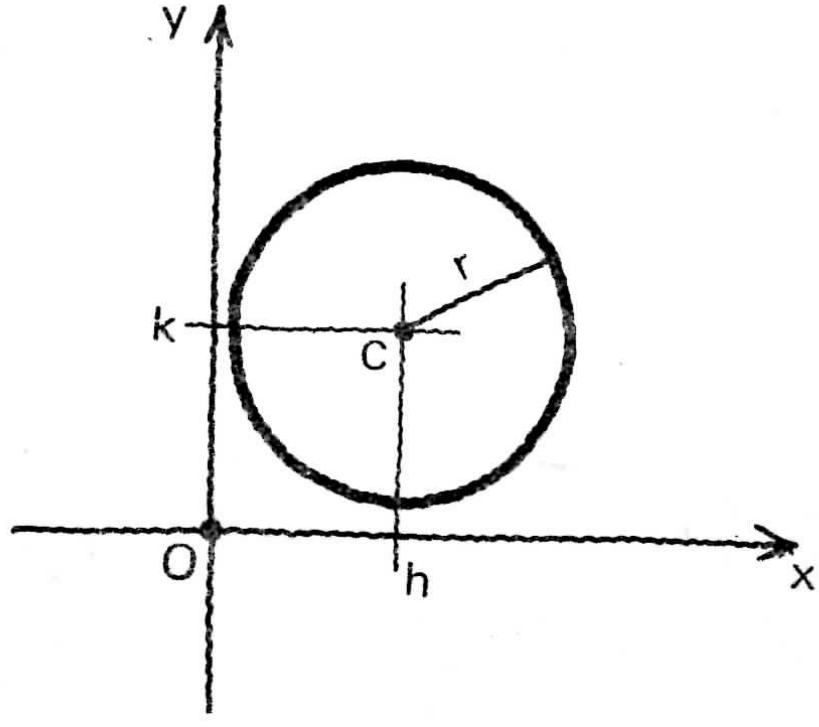
$r \in \mathbb{R} \wedge r > 0$



Ecuación ordinaria
de una **circunferencia**
de radio **r,**
con centro en
$\mathbf{C = (h, k)}$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

$h,k \in \mathbb{R} \wedge r \in \mathbb{R}^+$



Ecuación general de la circunferencia

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$D, E, F \in \mathbb{R}$

- $D = -2h$
- $E = -2k$
- $F = h^2 + k^2 - r^2$
- centro $C = (h, k)$
- radio r

Ecuación ordinaria de la circunferencia

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

$h, k \in \mathbb{R} \wedge r \in \mathbb{R}^+$

- $h=-\frac{D}{2}$
- $k=-\frac{E}{2}$
- $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$
- $D=-2h$
- $E=-2k$
- $F=h^2+k^2-r^2$

Procedimiento para transformar la ecuación ordinaria de una circunferencia en una ecuación general

- Estado inicial → $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

- Desarrollar los binomios cuadráticos del primer miembro:

- Estado intermedio 1 → $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

- Sumar $(-r^2)$ a ambos miembros:

- Estado intermedio 2 → $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$

- Reducir términos semejantes y ordenar de acuerdo con el modelo:

- Estado final → $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Ejemplo de transformación de la ecuación ordinaria de una circunferencia en su ecuación general.

- Estado inicial → $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

- Estado intermedio 1 → $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$

- Estado intermedio 2 → $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 0$

- Estado final → $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

Ejemplo de transformación de la ecuación general de una circunferencia en su ecuación ordinaria.

- Estado inicial → $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$
  - Sumar + 10 a ambos miembros:
- Estado interm. 1 $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10$
  - Agrupar los términos de x y los de y:
- Estado interm. 2 $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 10$
  - Completar trinomios cuadrados perfectos en x e y:
- Estado interm. 3 $\overline{x^2 - 6x + 9} + \overline{y^2 + 2y + 1} = 20$
  - Factorizar los trinomios cuadrados perfectos en el primer miembro
- Estado final → $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$

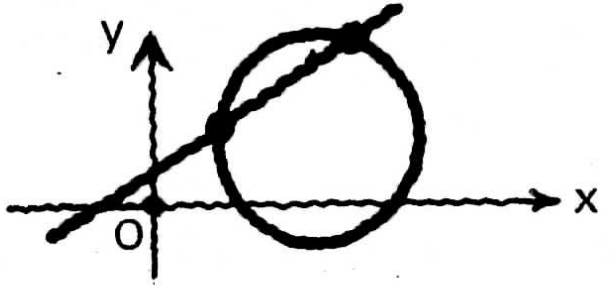
La ecuación $\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

$D, E, F \in \mathbb{R}$

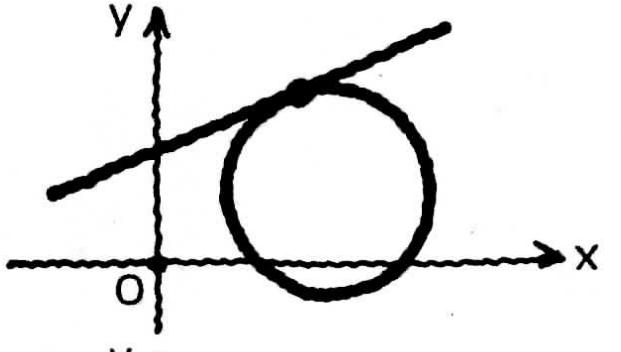
representa:

- una circunferencia de centro $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ si, y sólo si $\boxed{D^2 + E^2 - 4F > 0}$
- un punto $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ si, y sólo si $\boxed{D^2 + E^2 - 4F = 0}$
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano si, y sólo si $\boxed{D^2 + E^2 - 4F < 0}$

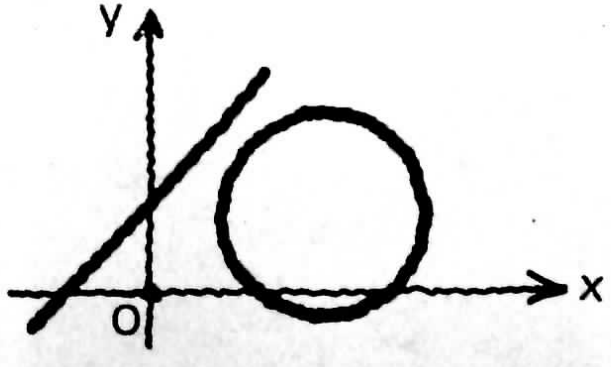
Para determinar la *intersección de una circunferencia y una recta*, se resuelve el sistema conjuntivo formado por sus ecuaciones.



- Si se obtienen **dos soluciones distintas en $\mathbb{R}$**, la recta es **secante.**



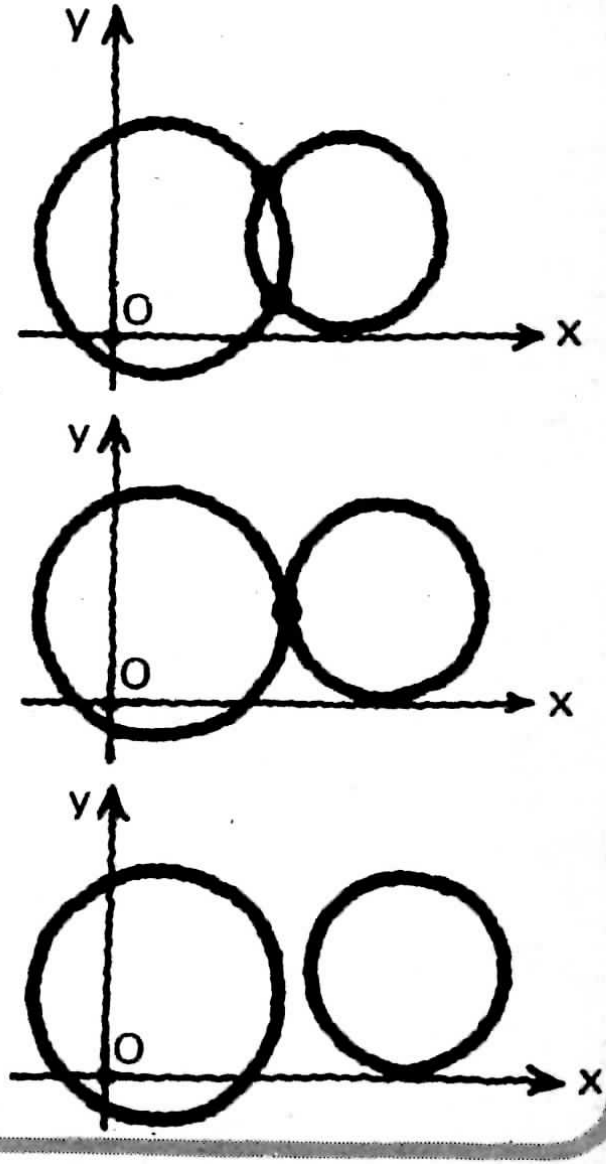
- Si se obtiene **una solución en $\mathbb{R}$**, la recta es **tangente.**



- Si **no** se obtiene **solución en $\mathbb{R}$**, la recta y la circunferencia **no se intersecan.**

Para determinar la *intersección de dos circunferencias,* se resuelve el sistema conjuntivo formado por sus ecuaciones.

- Si se obtienen **dos soluciones distintas en** $\mathbb{R}$, las circunferencias son **secantes.**
- Si se obtiene **una solución en** $\mathbb{R}$, las circunferencias son **tangentes.**
- Si **no** se obtiene ninguna **solución real,** las circunferencias son **ajenas,** (no se intersecan).



Para determinar
la **ecuación de una circunferencia**
dada por tres condiciones independientes,
se expresan éstas algebraicamente.

Cada condición se traduce en una ecuación.

La solución del sistema resultante
de tres ecuaciones con tres incógnitas,
nos permite calcular
las constantes de la ecuación requerida.

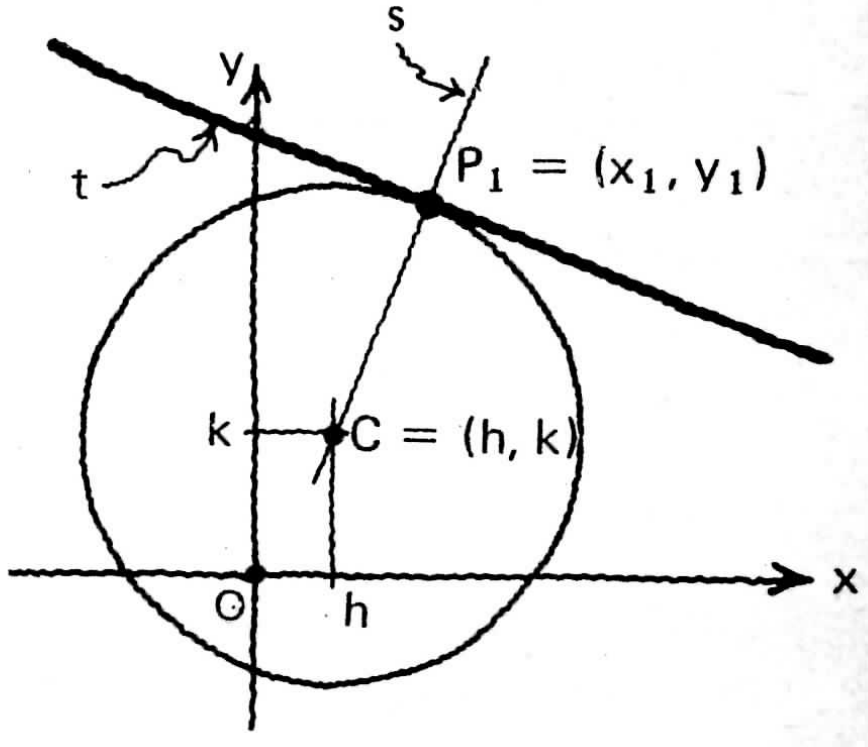
Ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto dado de ésta:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$$

$m_s \neq 0$

en que:

$$m_s = \frac{y_1 - k}{x_1 - h} \qquad x_1 \neq h$$

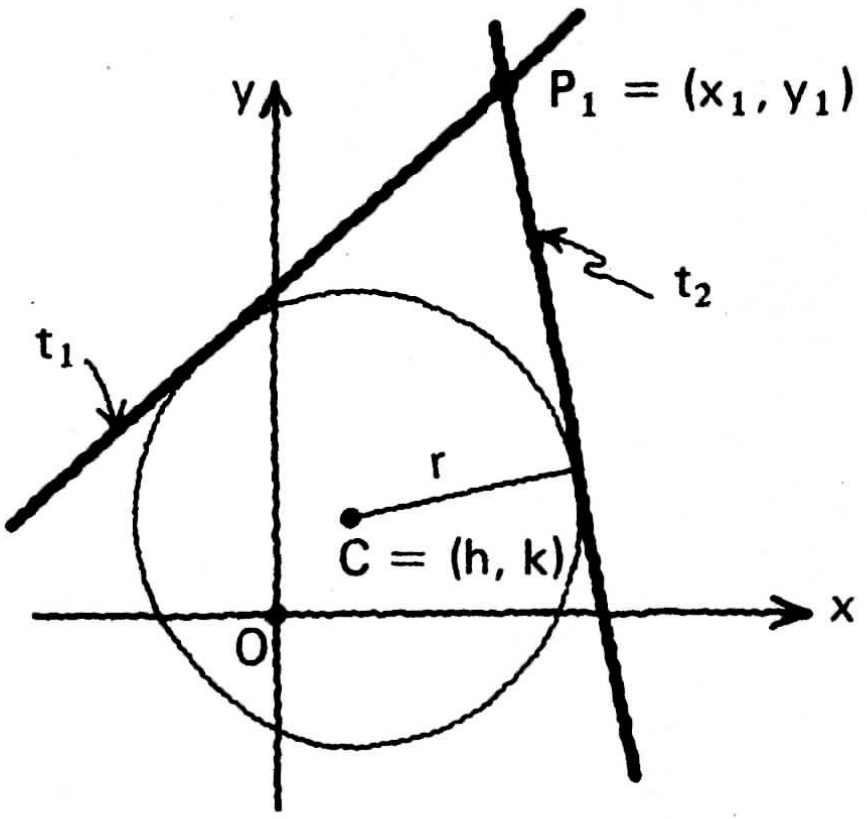


Las ecuaciones de las **tangentes a una circunferencia** de radio r y centro C = (h,k) y que pasan por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ pueden determinarse resolviendo para **m** la ecuación:

$$r = \frac{|mh - k - mx_1 + y_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

y sustituyendo cada uno de los dos valores obtenidos en:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

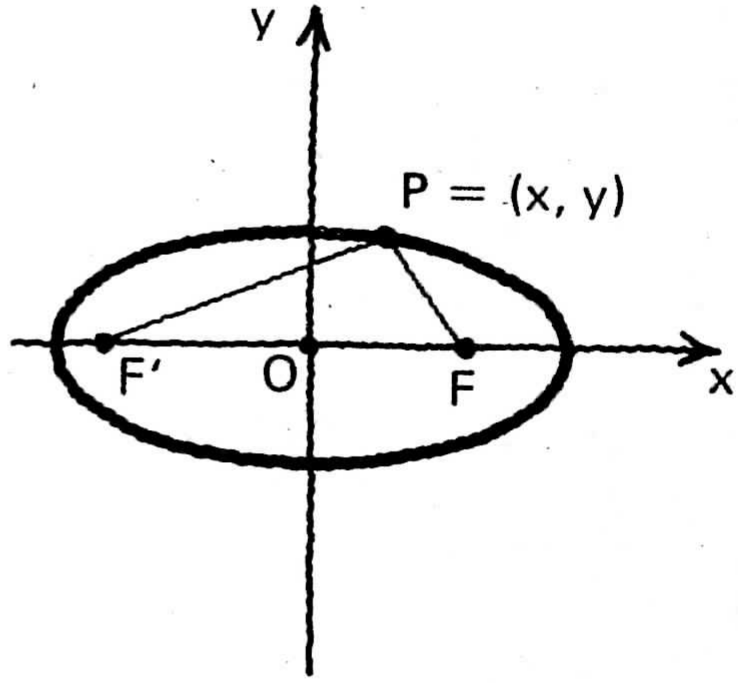


4. La elipse

Elipse

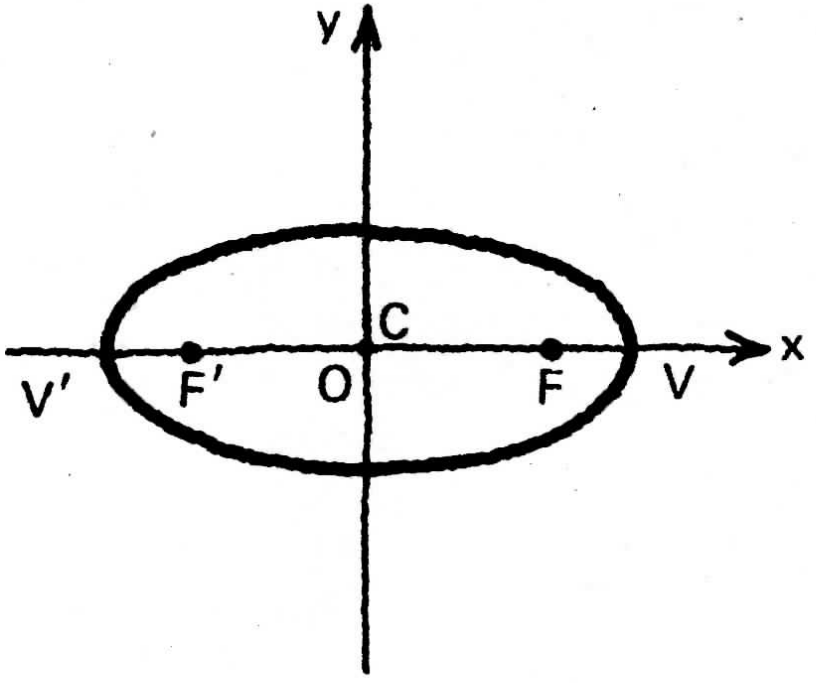
es un conjunto de puntos
en el plano
que
satisfacen la condición
siguiente:

la suma de las distancias
(no dirigidas) de cualquiera
de los puntos de la elipse
a dos puntos fijos llamados
focos, es constante.



En la elipse representada,

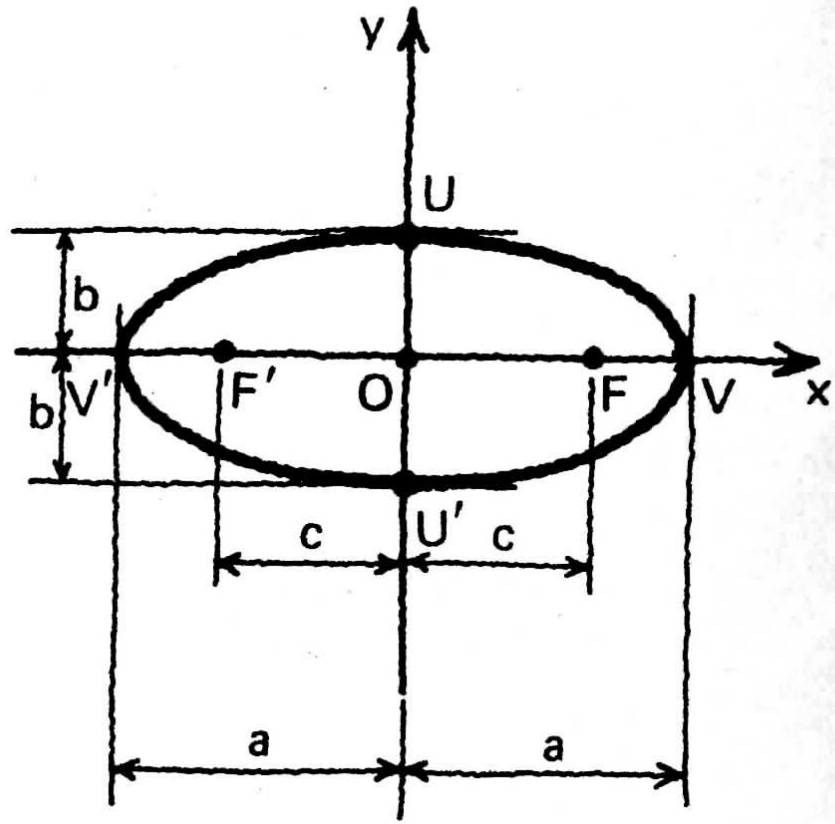
- **F** y **F′** son los **focos.**
- **V** y **V′** son los **vértices.**
- **C** es el **centro.**



En la elipse representada:

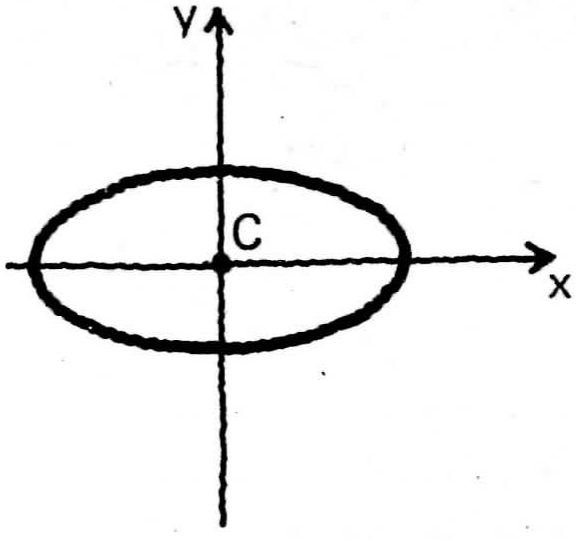
- **a** es el **semieje mayor**
- **b** es el **semieje menor**
- **c** es la **semidistancia focal**

- **2a** es el **eje mayor**
- **2b** es el **eje menor**
- **2c** es la **distancia focal**



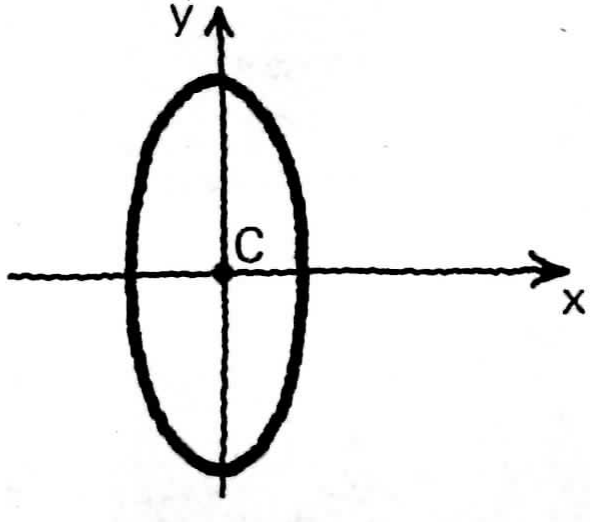
Elipse horizontal

el eje mayor está contenido
en una recta paralela al
eje de las x.



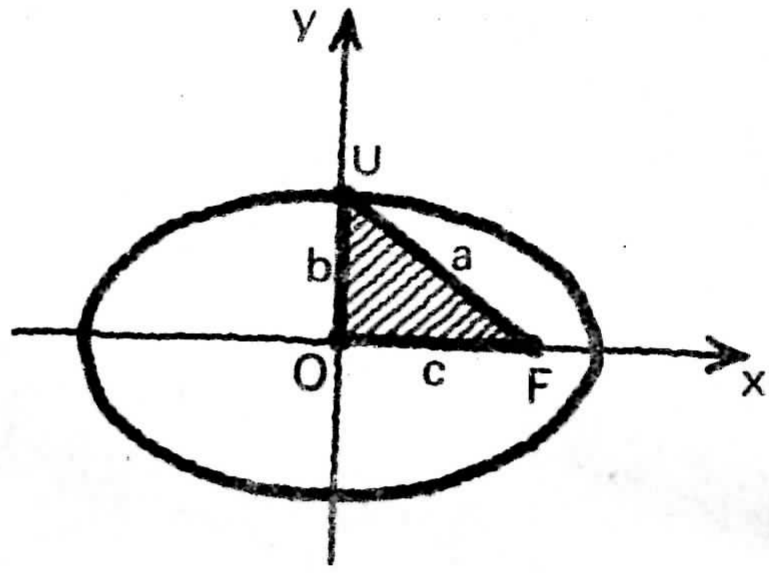
Elipse vertical

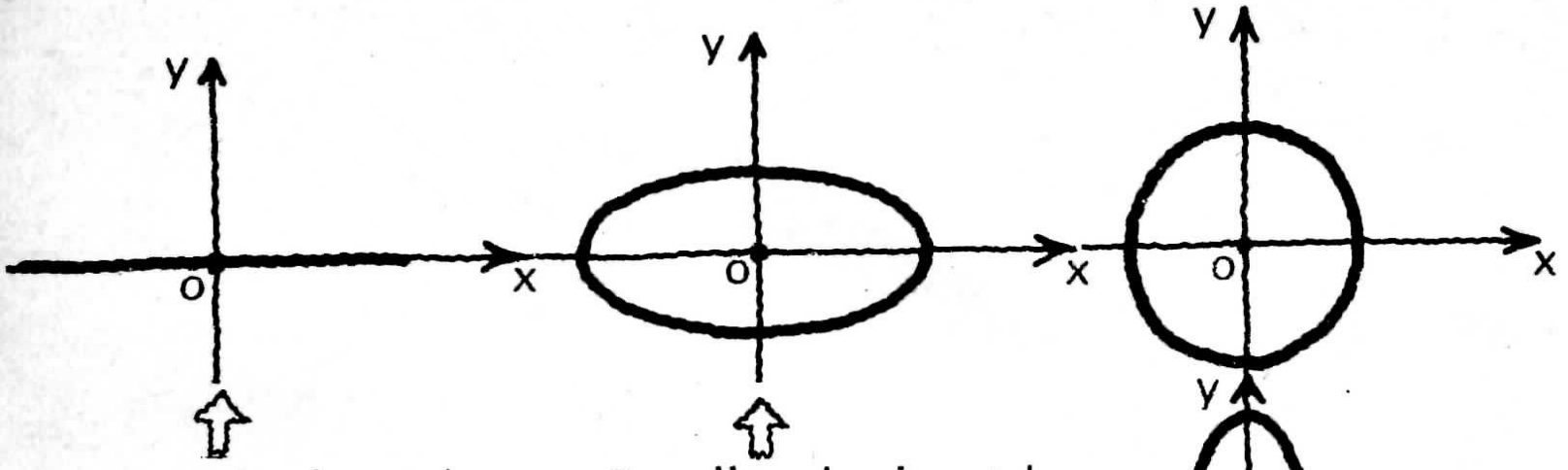
el eje mayor está contenido
en una recta paralela al
eje de las y.



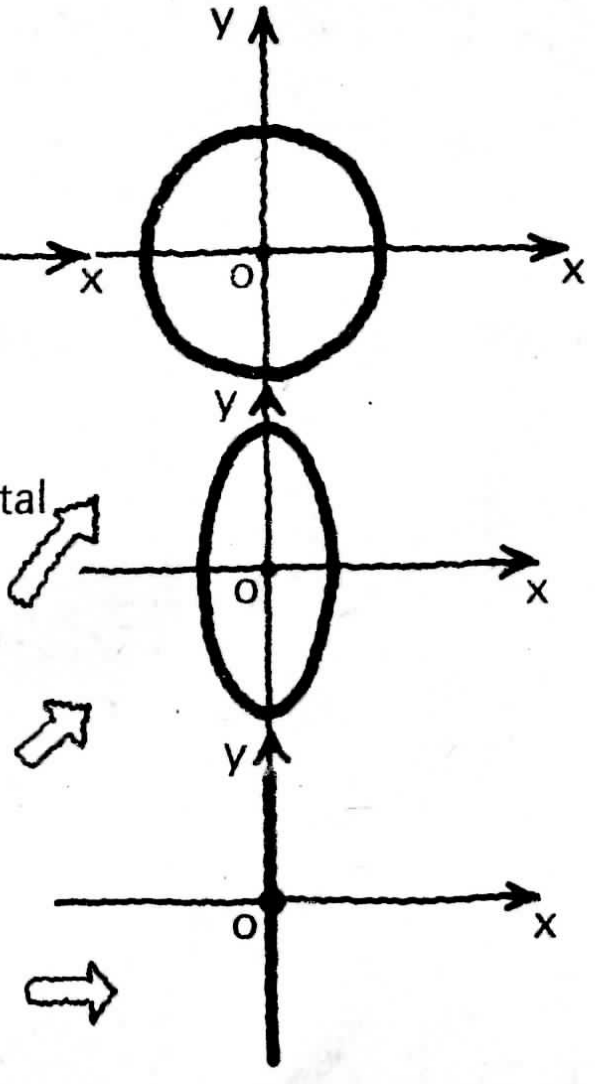
Para cualquier elipse horizontal o vertical, se verifica que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$





- elipse horizontal degenerada



- elipse horizontal
- circunferencia
- elipse vertical

- elipse vertical degenerada

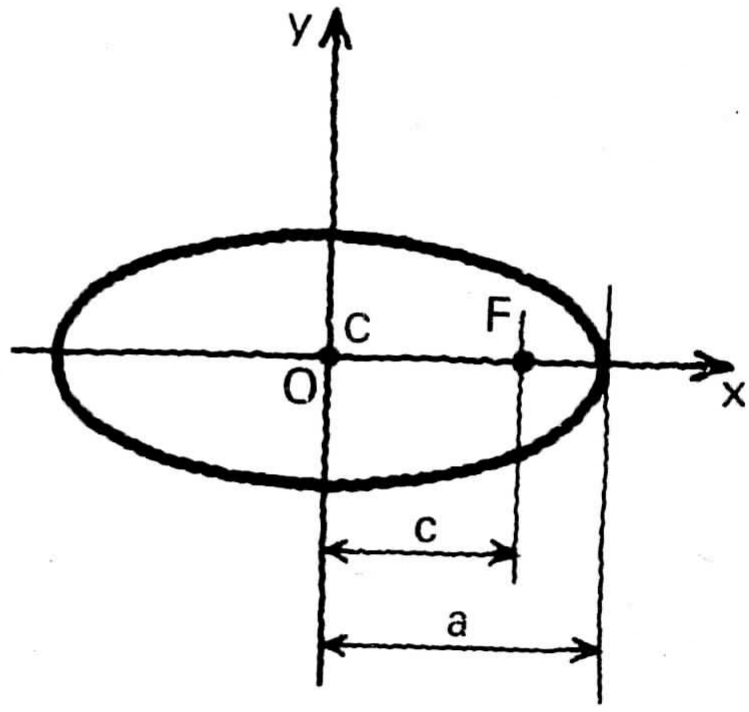
Llamamos

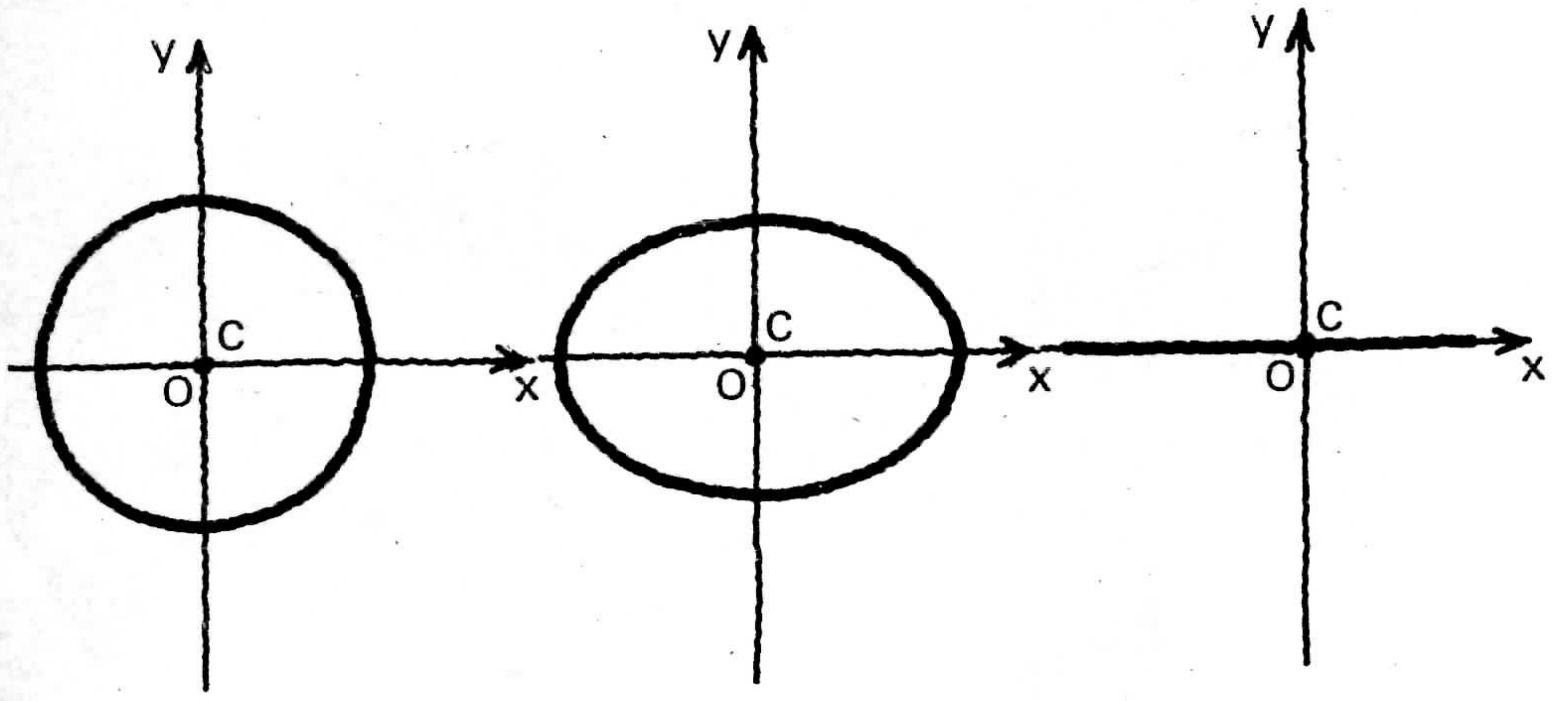
excentricidad

de una elipse
a la relación $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$

y la denotamos con **e**,
de modo que:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$$





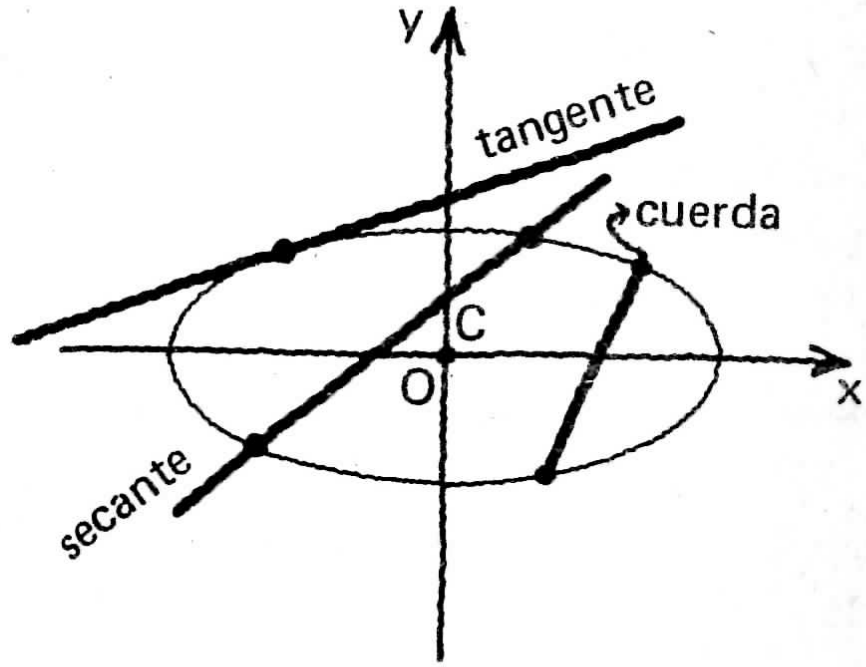
excentricidad es:

- $e = \frac{c}{a} = 0$
- $0 < e < 1$
- $e = \frac{c}{a} = 1$

Como en una circunferencia, en cualquier elipse podemos hablar de:

- **tangentes**
- **secantes**
- **cuerdas**

que se definen de manera similar que para la circunferencia.

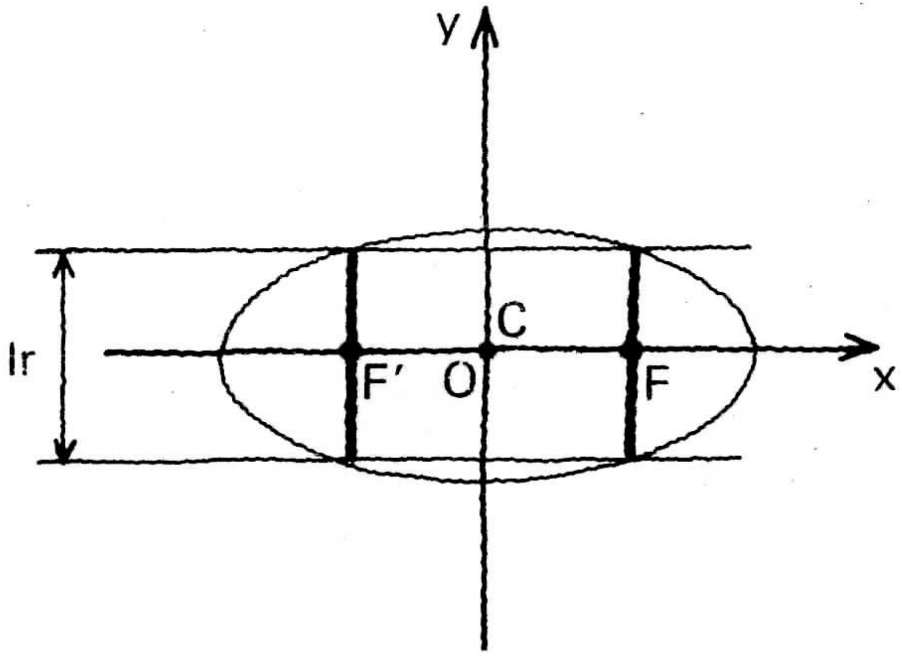


La cuerda
perpendicular al eje mayor
y
que pasa
por uno de los focos
se denomina:

lado recto

y la denotamos con lr.

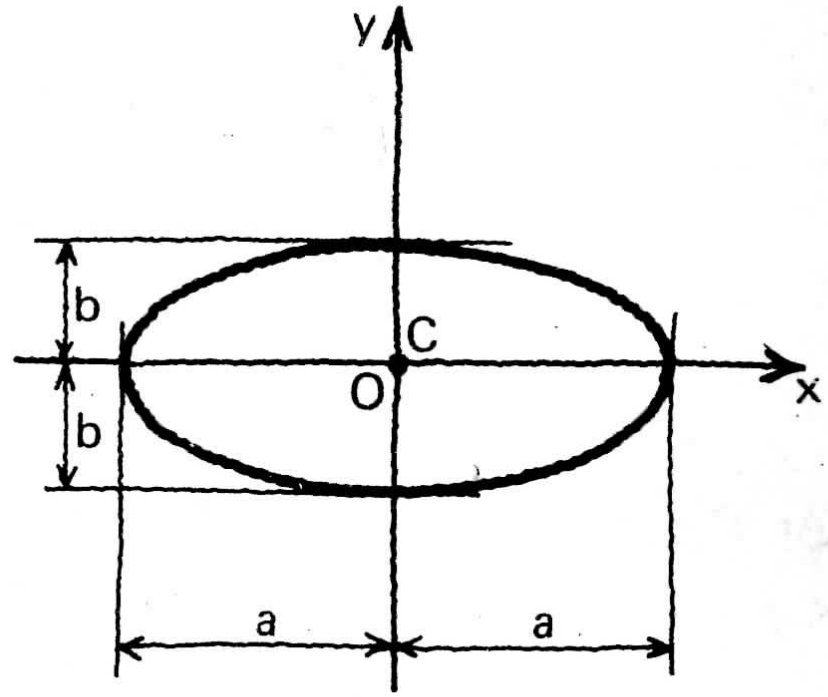
$$lr = \frac{2b^2}{a}$$



Ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

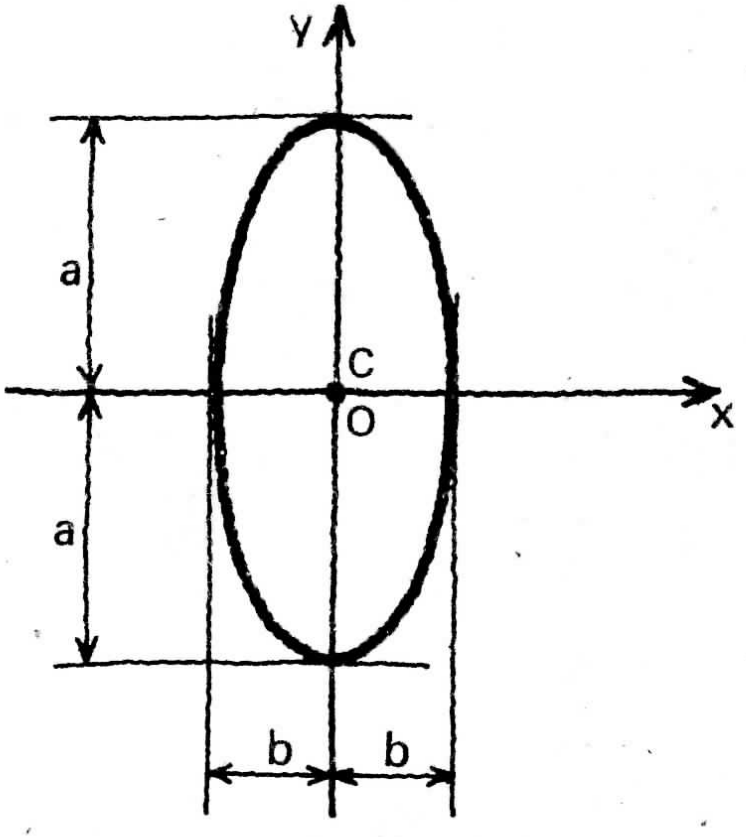
$a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a > b$



Ecuación de una elipse vertical con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

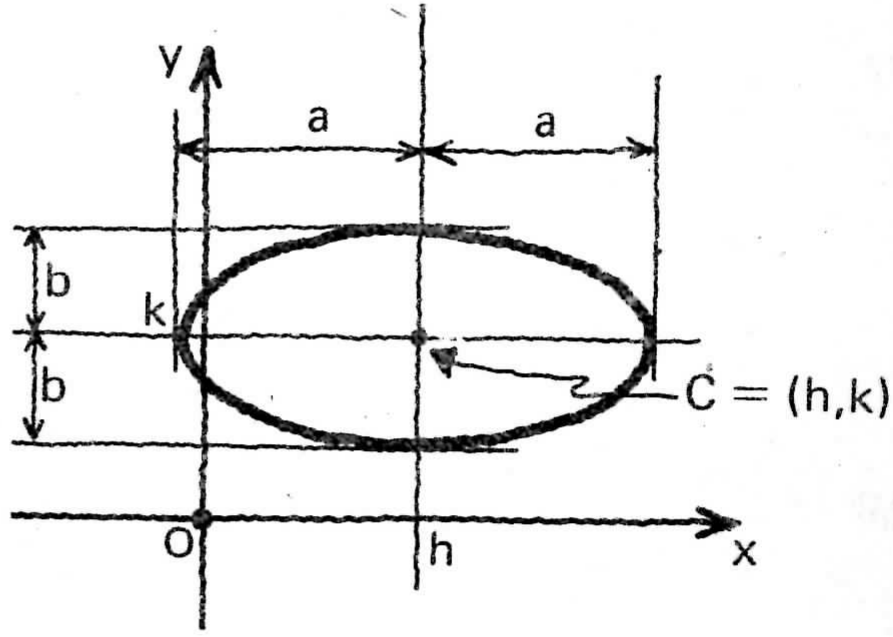
$a,b \in \mathbb{R}^+ \wedge a > b$



Ecuación de una elipse horizontal con centro en C = (h, k).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

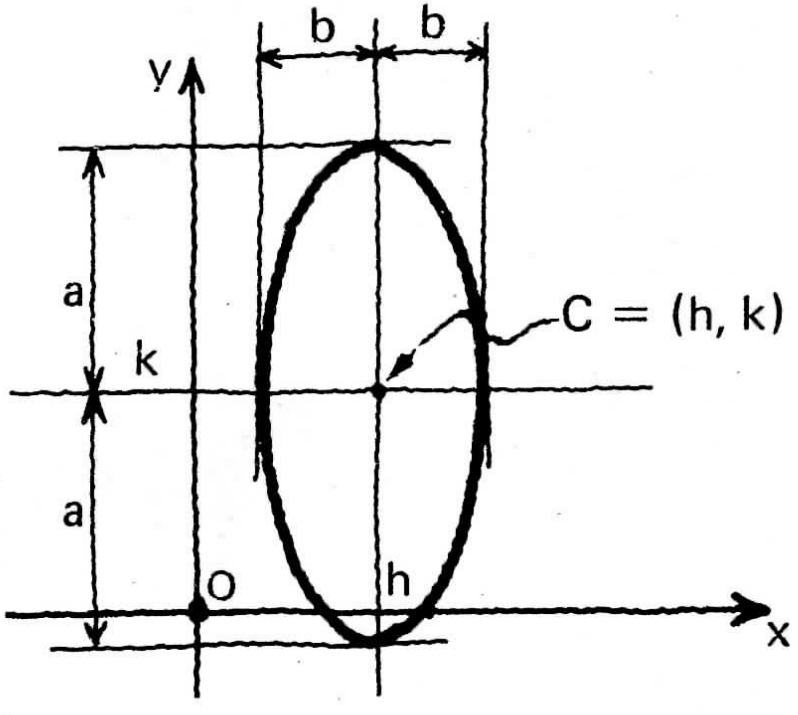
$h, k \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a > b$



Ecuación de una elipse vertical concentro en C = (h, k).

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$h, k \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a > b$



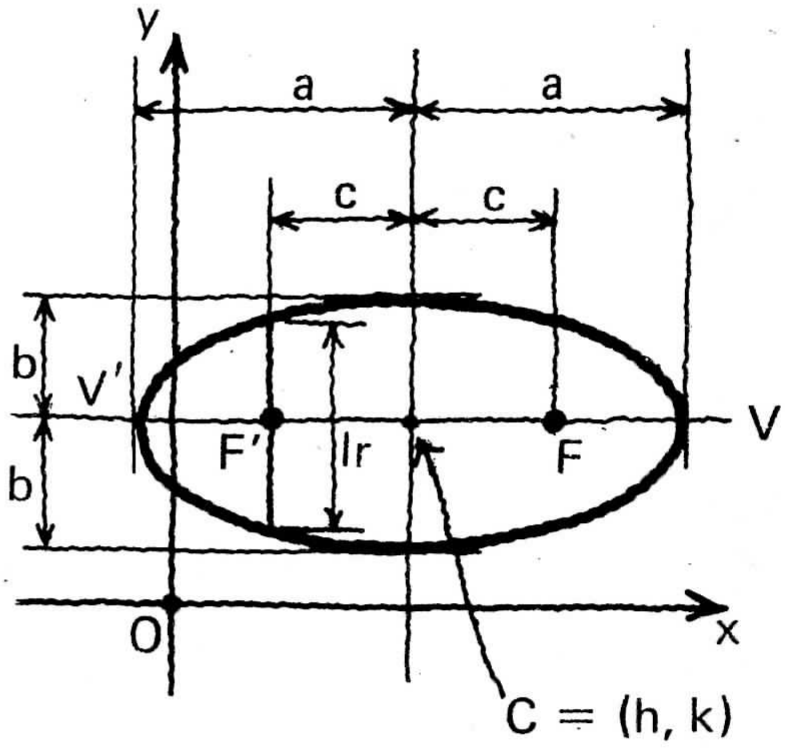
Elementos de una elipse horizontal

- Centro $C = (h, k)$
- Semieje mayor a
- Semieje menor b
- Semidistancia focal c
- Eje mayor 2a
- Eje menor 2b

- Distancia focal 2c
- Vértices: $V = (h + a, k)$
  $V' = (h - a, k)$
- Focos: $F = (h + c, k)$
- $F' = (h - c, k)$

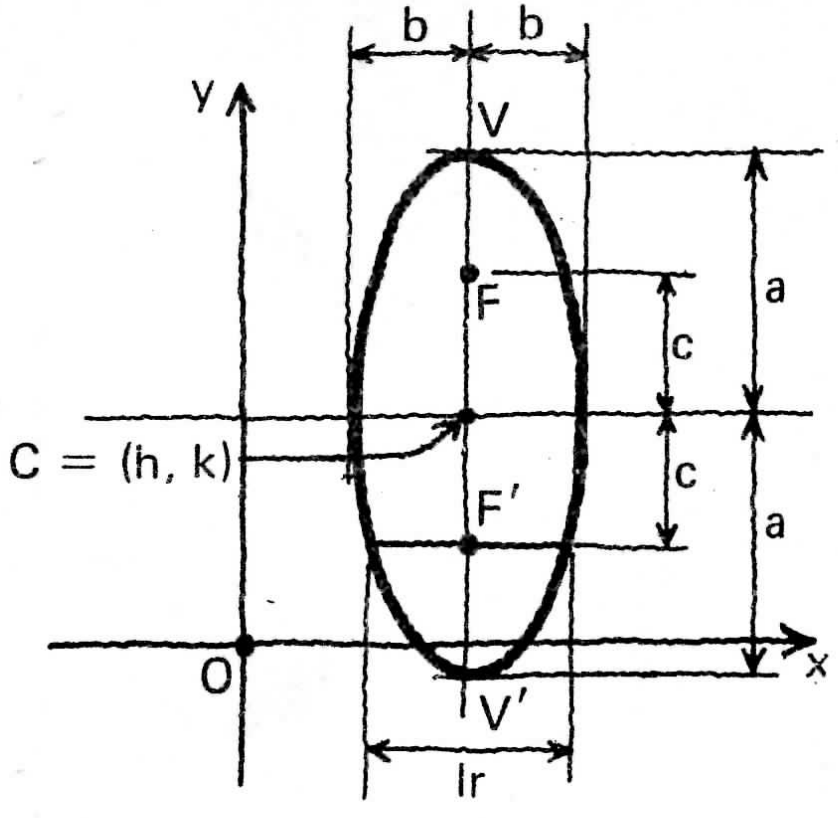
- Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$

- Lado recto: $lr = \dfrac{2b^2}{a}$



Elementos de una elipse vertical

- Centro $C = (h, k)$
- Semieje mayor a
- Semieje menor b
- Semidistancia focal c
- Eje mayor 2a
- Eje menor 2b
- Distancia focal 2c
- Vértices: $V = (h, k + a)$
  $V' = (h, k - a)$
- Focos: $F = (h, k + c)$
  $F' = (h, k - c)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$



La ecuación

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$$A, C, D, E, F \in \mathbb{R} \wedge A \cdot C > 0$$

representa

- una elipse - no circunferencia - con ejes paralelos a los coordenados
- un punto, o
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

} si $A \neq C$

- una circunferencia
- un punto, o
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

} si $A = C$

Ejemplo de transformación de una ecuación ordinaria de una elipse en una ecuación general.

- Estado inicial ⟶ $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{4} = 1$

Multiplicando los dos miembros por $9 \times 4 = 36$:

- Estado intermedio 1 $4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$

Desarrollando binomios cuadráticos:

- Estado intermedio 2 $4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = 36$

Efectuando productos indicados:

- Estado intermedio 3 $4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 90y + 225 = 36$

Reduciendo términos semejantes y ordenando:

- Estado final ⟶ $4x^2 + 9y^2 - 24x - 90y + 225 = 0$

Ejemplo de transformación de una ecuación general en una ecuación ordinaria.

- Ecuación general → $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$

Pasando término independiente al segundo miembro: $16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y = 92$

Factorizando los binomios en x e y: $16(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) = 92$

Completando trinomios cuadrados perfectos en x e y: $16(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = 144$

Factorizando los trinomios cuadrados perfectos en x e y: $16(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 144$

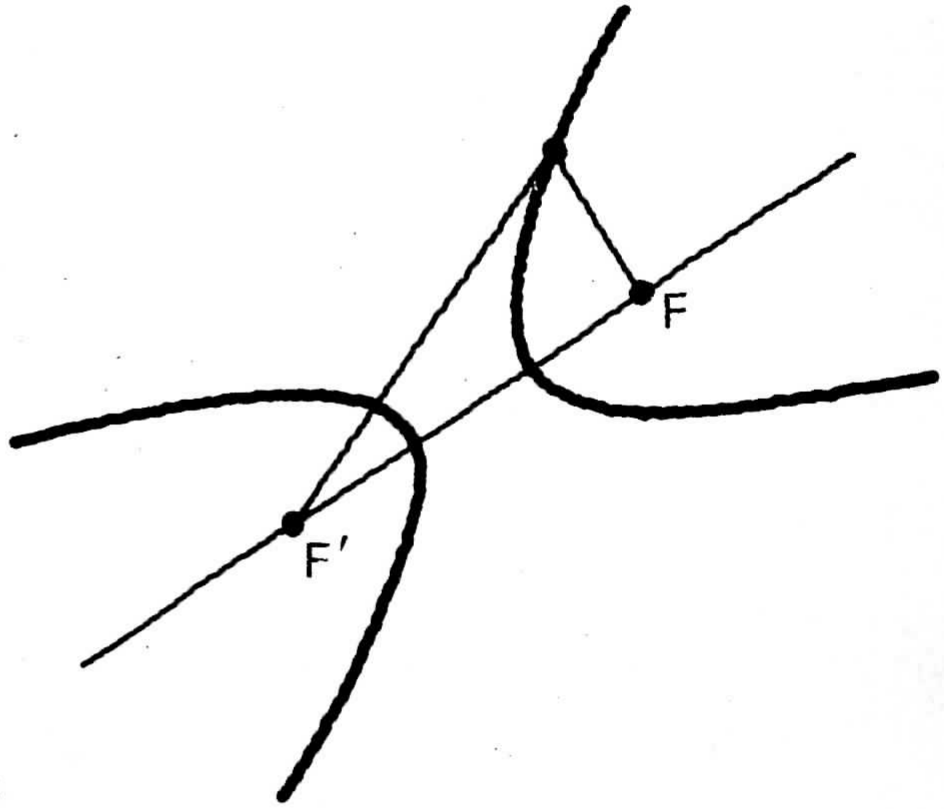
Dividiendo entre el segundo miembro:

- Ecuación ordinaria → $\dfrac{(x + 1)^2}{9} + \dfrac{(y - 2)^2}{16} = 1$

5. La hipérbola

Hipérbola

es un conjunto
de puntos
en el plano
que satisfacen
la condición
siguiente:



el valor absoluto de la
diferencia de las distancias
(no dirigidas) de un punto
cualquiera del conjunto a dos
puntos fijos llamados focos, es constante.

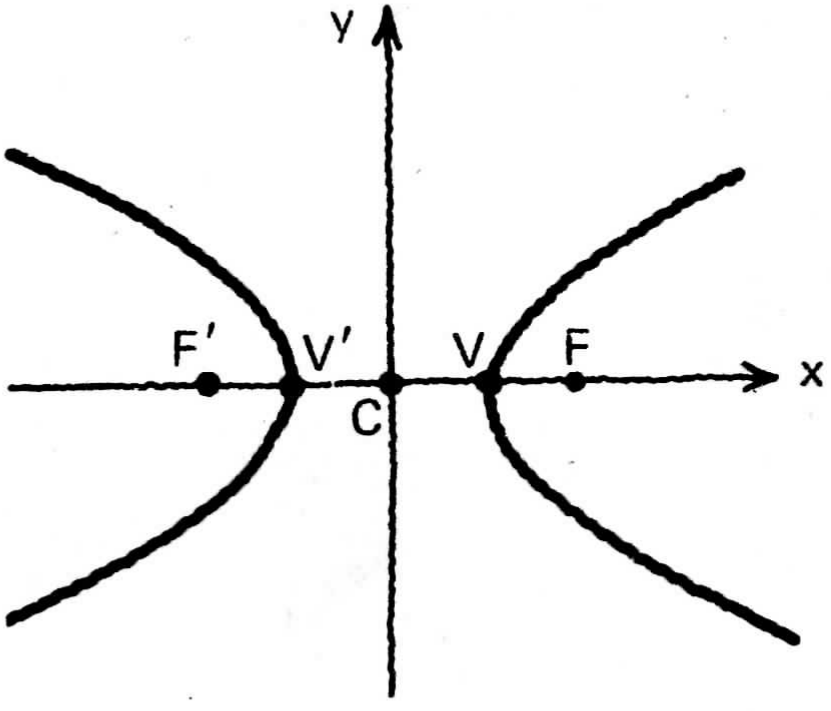
Los puntos F y F′
son los
focos de la hipérbola.

Los puntos V y V′
son sus

vértices.

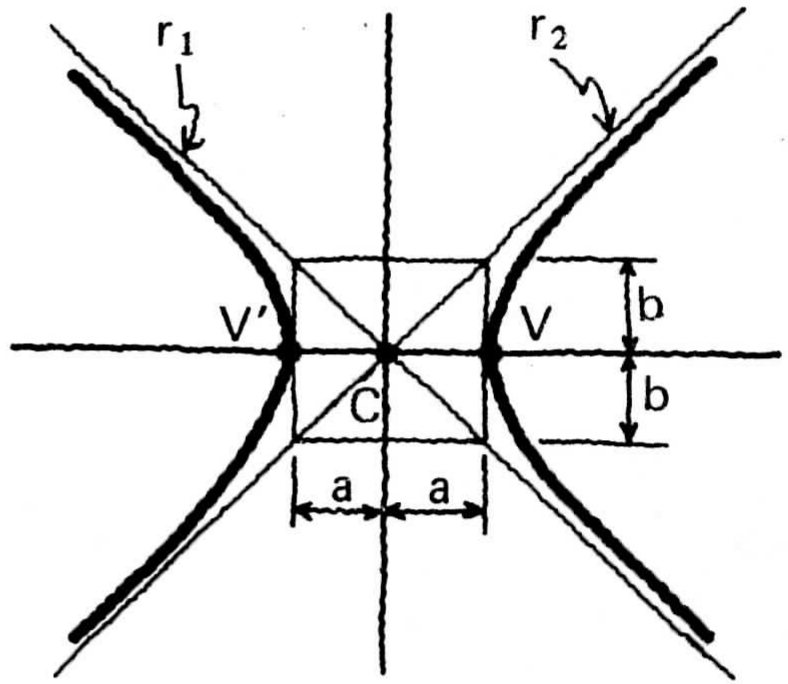
El punto C es el centro,
que, en este caso,
coincide con el origen
del sistema cartesiano.

$\overleftrightarrow{F'F}$ es el **eje focal.**

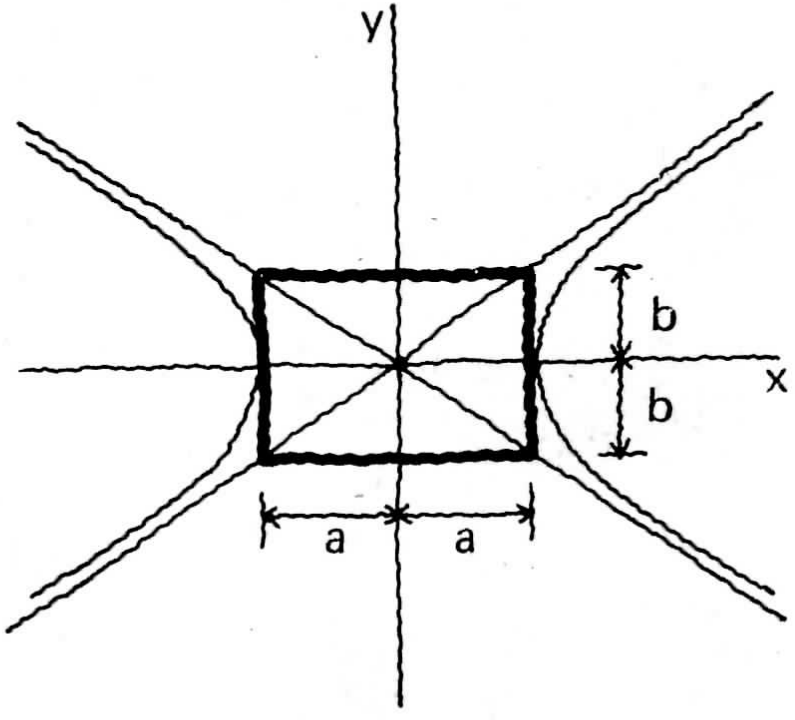


En la hipérbola mostrada:

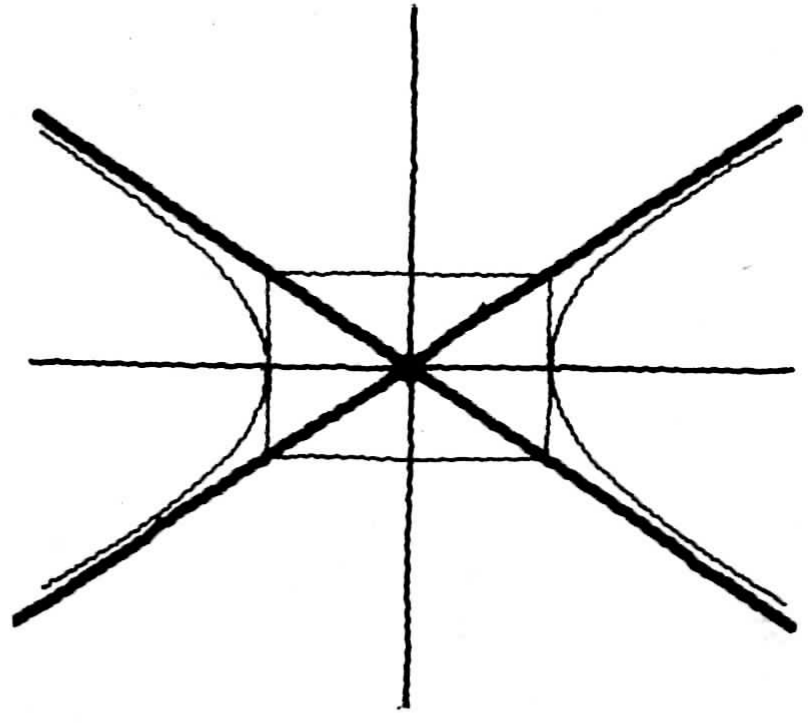
- $|\overline{CV}|$ o $|\overline{CV'}|$ es el **semieje transverso** y lo denotamos con **a**.
- Con **b** denotamos el **semieje conjugado.**
- r_1 y r_2 son las **asíntotas.**



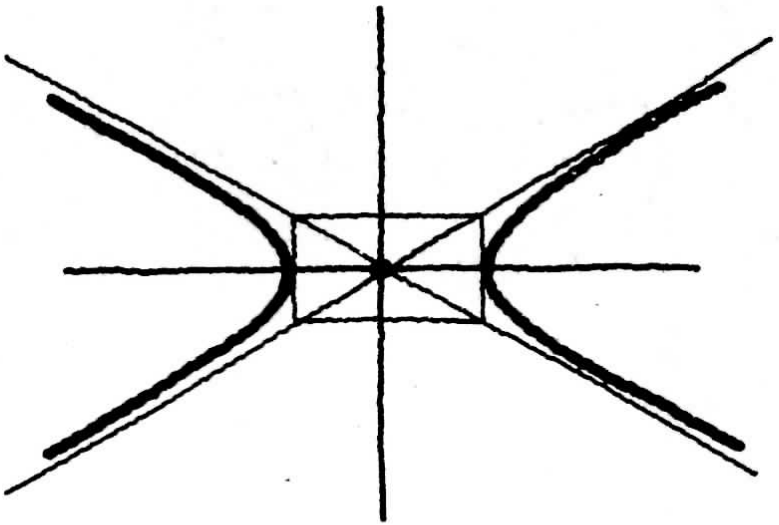
Al rectángulo
cuyos lados son:
el eje transverso
y
el eje conjugado
se le llama
rectángulo auxiliar
o
rectángulo de referencia.



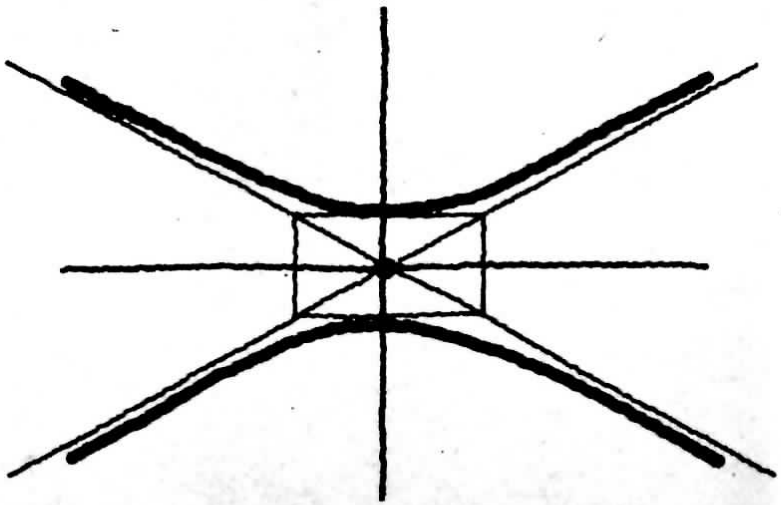
Las asíntotas contienen a las diagonales del rectángulo de referencia.



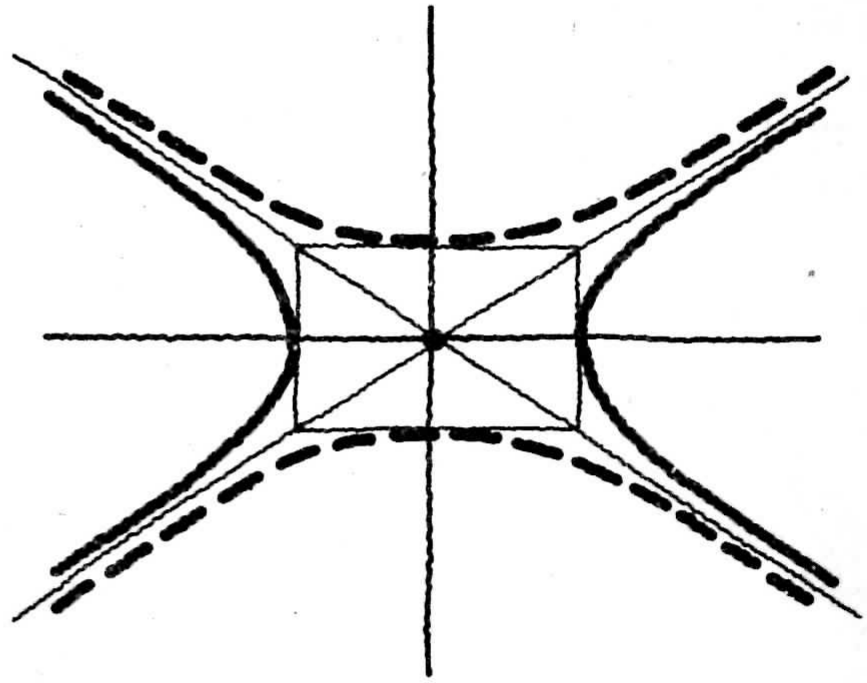
Si el eje focal
es paralelo (o coincide con)
el eje de las x,
la **hipérbola** es **horizontal.**



Si el eje focal
es paralelo (o coincide con)
el eje de las y,
la **hipérbola** es **vertical.**



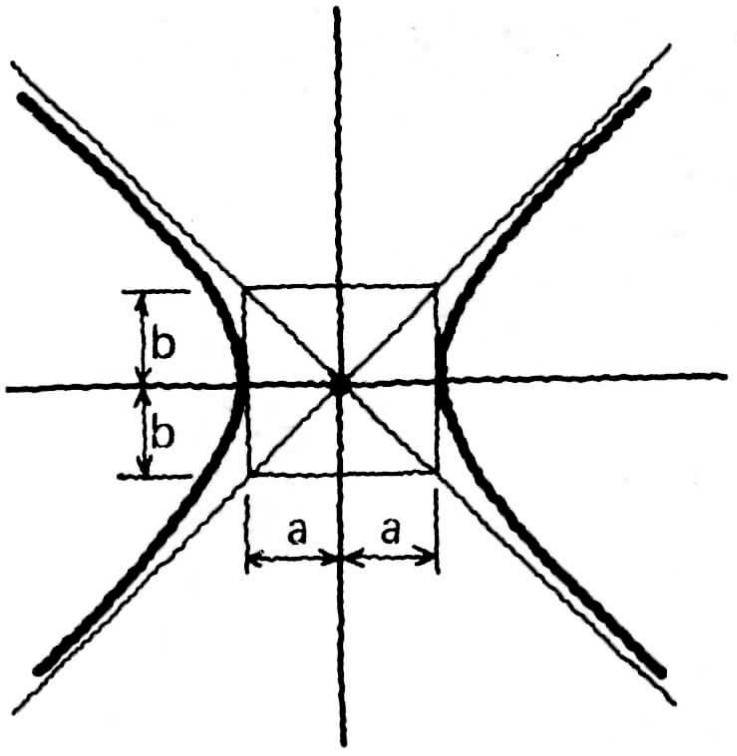
A dos hipérbolas
que tienen
las mismas asíntotas
(y el mismo
rectángulo de referencia)
se les llama
hipérbolas
conjugadas.



Se llama
hipérbola equilátera
a la que tiene
iguales
sus semiejes
transverso y conjugado.

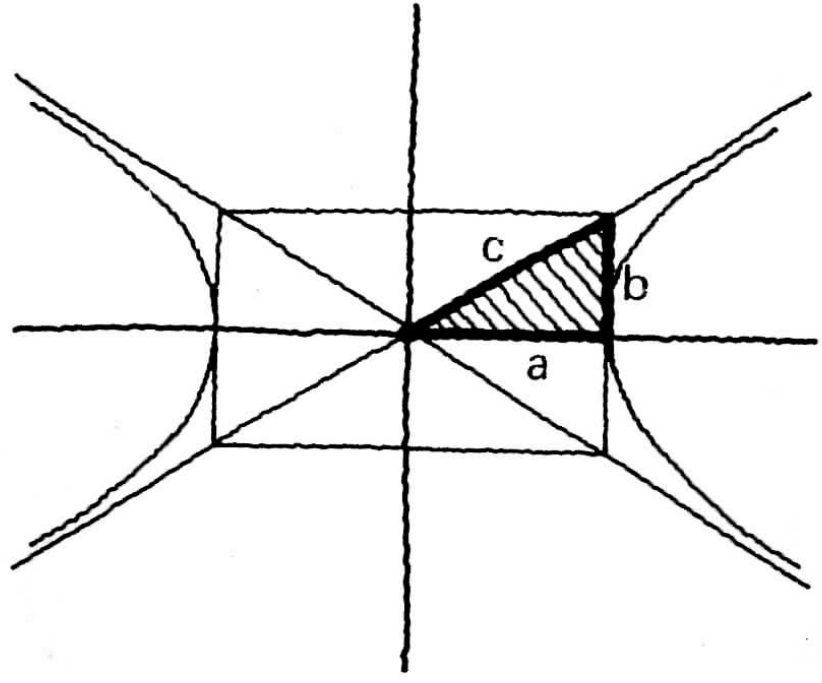
$$\mathbf{a = b}$$

El rectángulo auxiliar
es un cuadrado.



Para toda hipérbola se cumple:

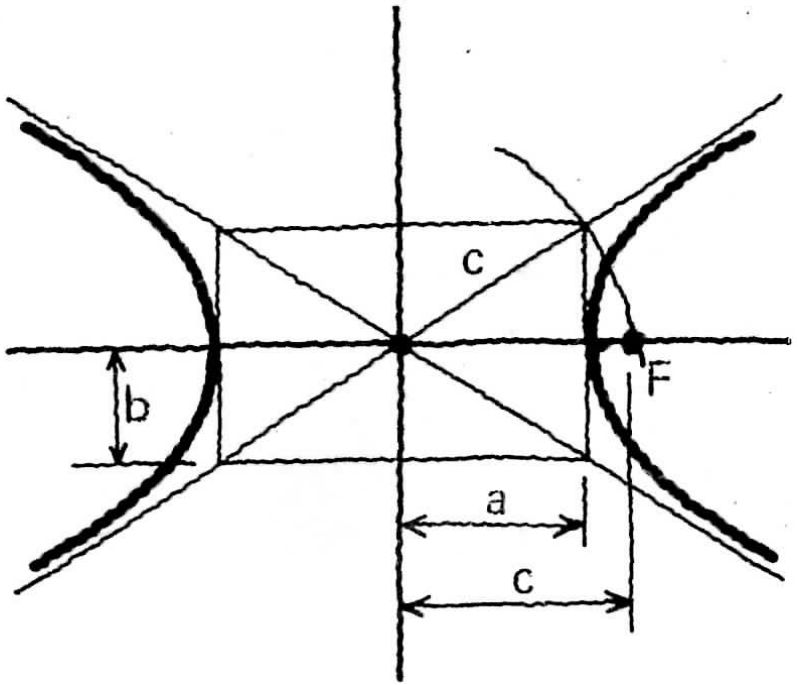
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Definimos
la
excentricidad (e)
de una hipérbola
como el cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

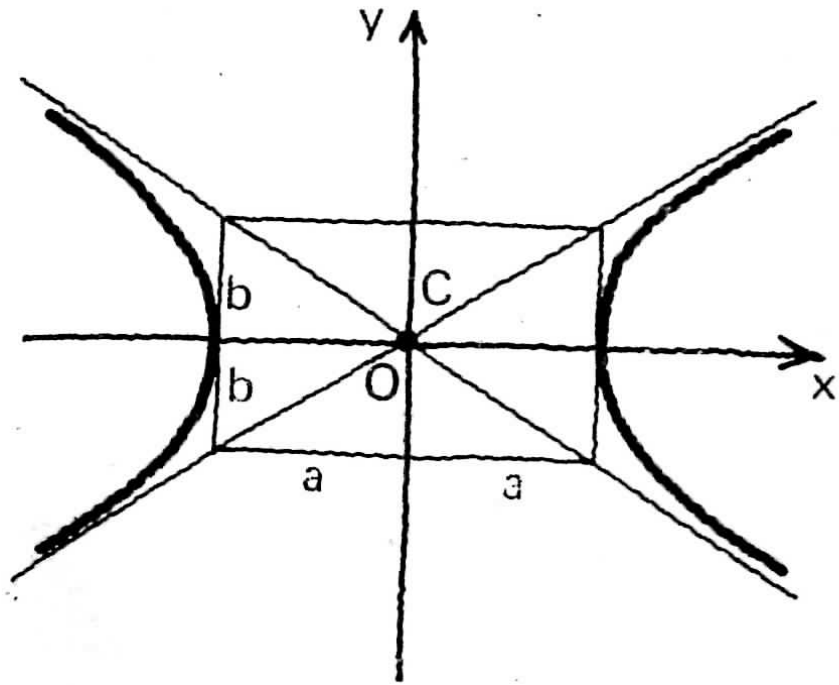
Como $c > a$, $e > 1$.



Ecuación de
una hipérbola
horizontal
con
centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

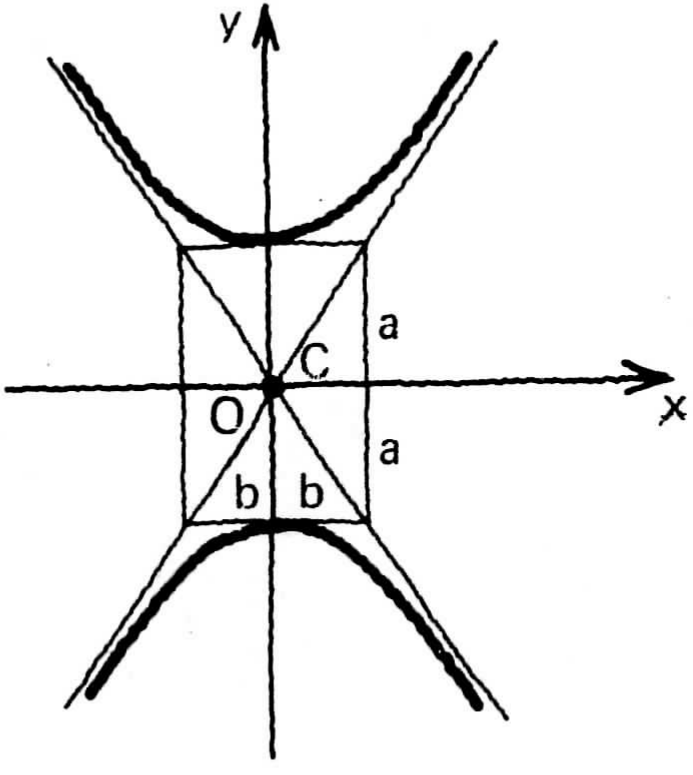
$a, b \in \mathbb{R}^+$



Ecuación de una hipérbola vertical con centro en el origen:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

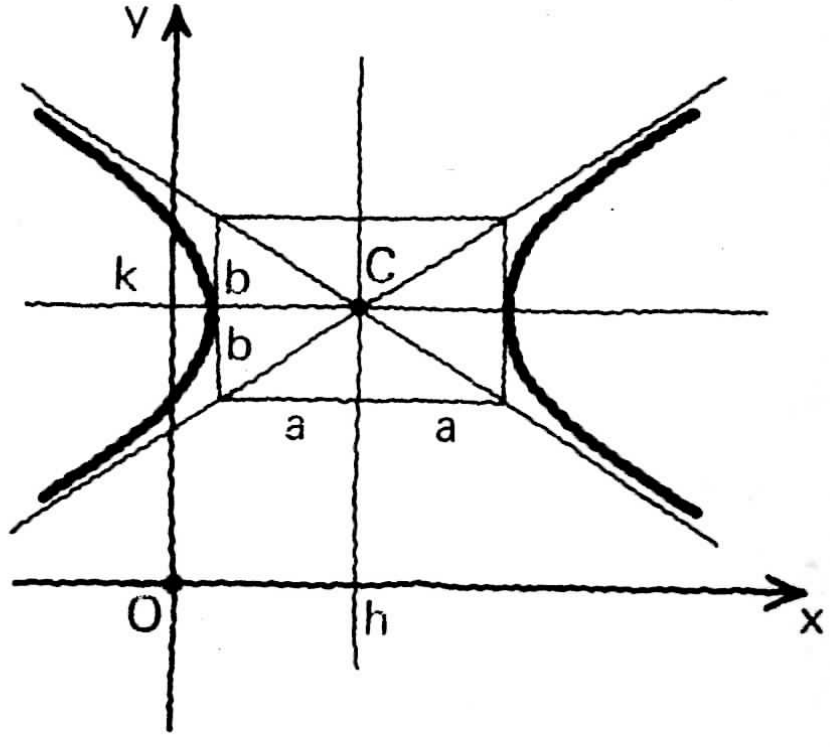
$a, b \in \mathbb{R}^+$



Ecuación ordinaria
de una
hipérbola horizontal
con centro en (h,k):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

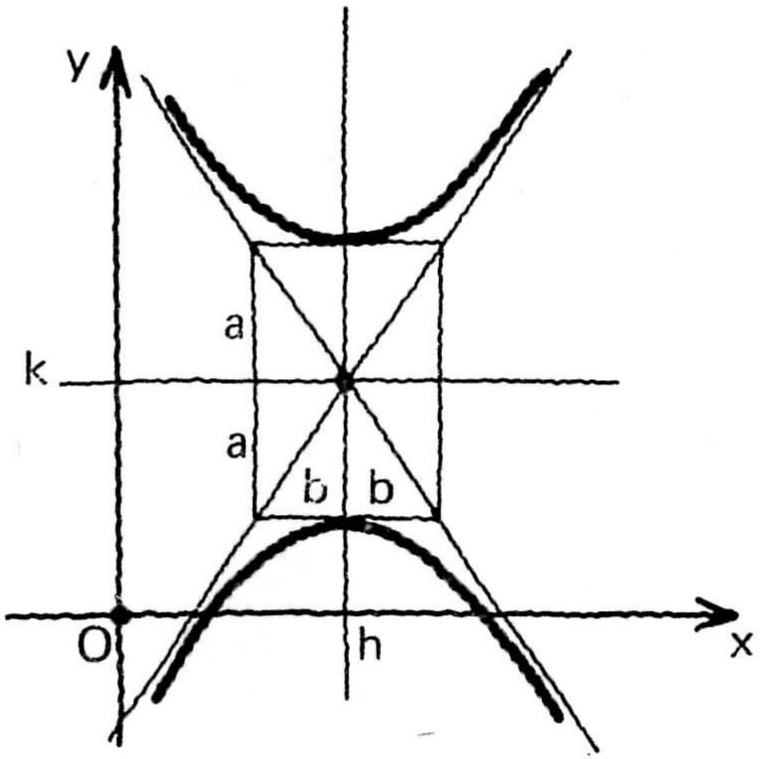
$h,k \in \mathcal{R}$, $a, b \in \mathcal{R}^+$



Ecuación ordinaria
de una
hipérbola vertical
con centro en (h, k):

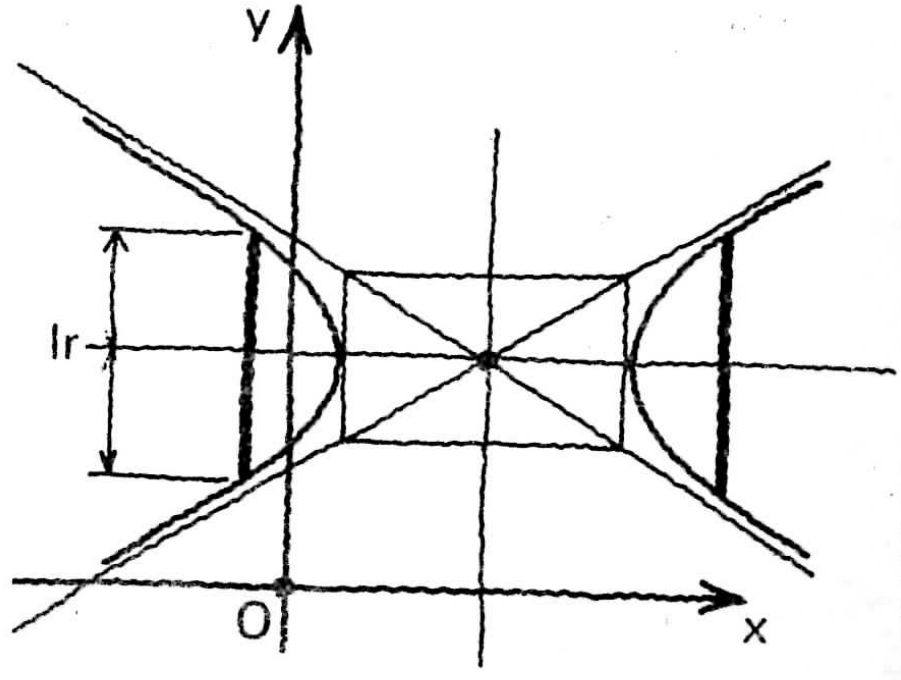
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

$h, k \in \mathbb{R}, a, b, \in \mathbb{R}^+$



En una hipérbola se llama **lado recto** o **ancho focal** a la medida de la cuerda que contiene a un foco y es perpendicular al eje focal.

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$



Una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

con A, C, D, E, F $\in \mathcal{R}$
y A · C < 0 (A y C de signos contrarios)

puede representar:

- una hipérbola con sus ejes paralelos a los cartesianos
  o
- un par de rectas concurrentes (hipérbola degenerada)

Ejemplo de transformación de una ecuación ordinaria de una hipérbola en una ecuación general.

- Estado inicial ⟶ $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1$
- Estado intermedio 1 $4(x-2)^2 - 9(y-4)^2 = 36$
- Estado intermedio 2 $4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 8y + 16) = 36$
- Estado intermedio 3 $4x^2 - 16x + 16 - 9y^2 + 72y - 144 = 36$
- Estado final ⟶ $4x^2 - 9y^2 - 16x + 72y - 164 = 0$

Ejemplo de transformación de una ecuación general en la ecuación ordinaria de una hipérbola.

- Estado inicial → $4x^2 - 9y^2 - 16x + 72y - 164 = 0$
- Estado intermedio 1 → $4x^2 - 16x - 9y^2 + 72y = 164$
- Estado intermedio 2 → $4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 8y) = 164$
- Estado intermedio 3 → $4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 8y + 16) = 36$
- Estado intermedio 4 → $4(x - 2)^2 - 9(y - 4)^2 = 36$
- Estado final → $\dfrac{(x - 2)^2}{9} - \dfrac{(y - 4)^2}{4} = 1$

Si al intentar transformar una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación ordinaria, resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

o

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$$

dicha ecuación representa:

- un par de rectas concurrentes en el punto (h, k) (hipérbola degenerada)

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola de ecuación dada en la forma ordinaria, pueden obtenerse por el siguiente procedimiento:

1. Sustituir el **1** por *cero*, en el segundo miembro de la ecuación.
2. Factorizar el primer miembro.
3. Escribir el sistema disyuntivo equivalente, en donde cada ecuación representa la ecuación de una asíntota.

Las ecuaciones pueden ser expresadas en la forma que se desee.

Ejemplo de determinación de las asíntotas de una hipérbola.

Ecuación de la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

1. Ecuación de la hipérbola degenerada

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 0$$

2. Factorizando el primer miembro

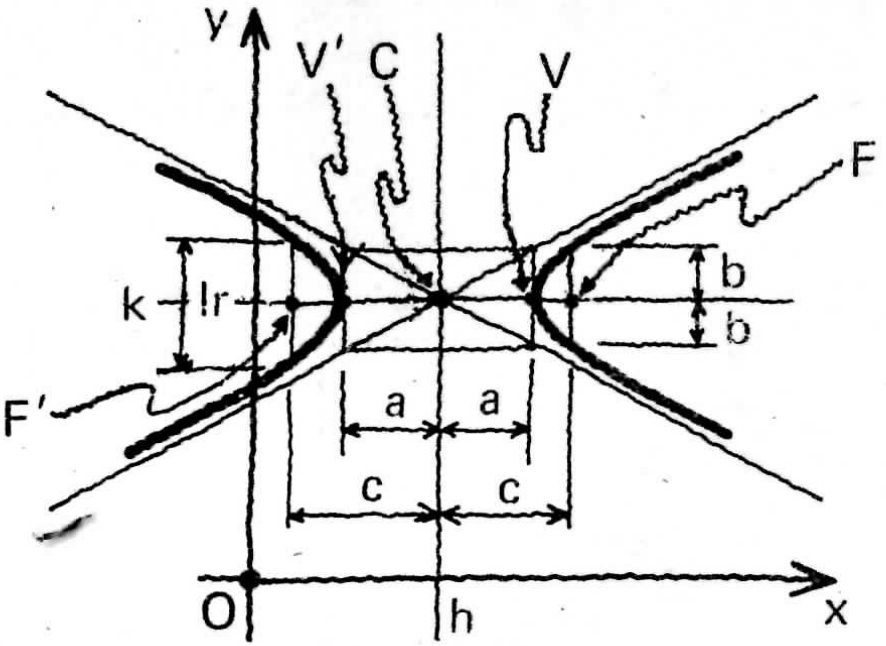
$$\left(\frac{x-2}{3} + \frac{y-4}{2}\right)\left(\frac{x-2}{3} - \frac{y-4}{2}\right) = 0$$

3. Sistema disyuntivo equivalente

$$\underbrace{\frac{x-2}{3} + \frac{y-4}{2} = 0}_{\uparrow} \vee \underbrace{\frac{x-2}{3} - \frac{y-4}{2} = 0}_{\uparrow}$$

Ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola dada, que pueden ser expresadas en la forma que se desee.

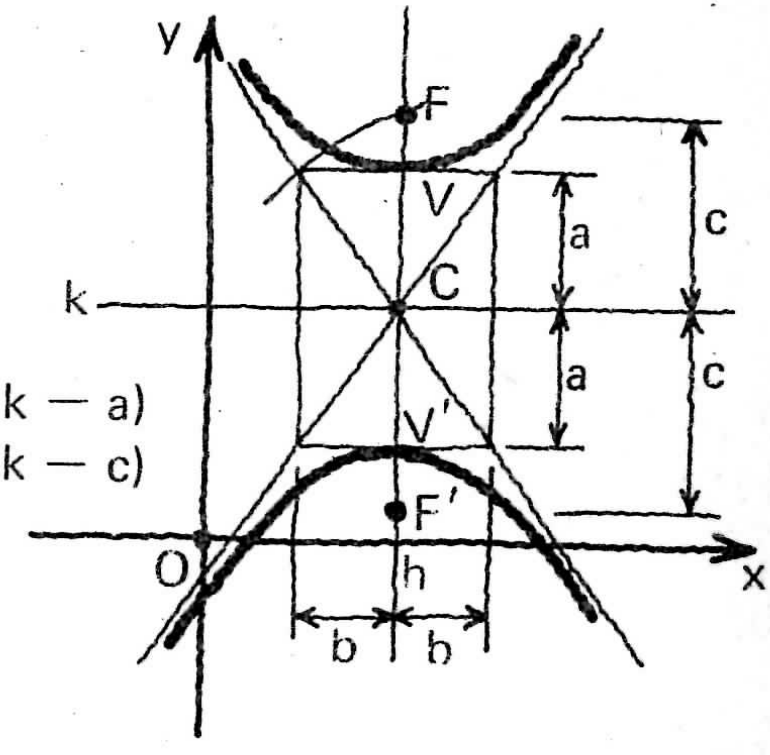
Elementos de una hipérbola horizontal.



- Centro C = (h, k)
- Semieje transversal **a**
- Semieje conjugado **b**
- Semidistancia focal **c**
- Eje transverso **2a**
- Eje conjugado **2b**
- Distancia focal **2c**
- Vértices: $V = (h + a, k)$ $V' = (h - a, k)$
- Focos: $F = (h + c, k)$ $F' = (h - c, k)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Lado recto: $lr = 2b^2/a$
- Ecuaciones de las asíntotas: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

Elementos de una hipérbola vertical

- Centro C = (h,k)
- Semieje transverso **a**
- Semieje conjugado **b**
- Semidistancia focal **c**
- Eje transverso **2a**
- Eje conjugado **2b**
- Distancia focal **2c**
- Vértice: $V = (h, k + a)$ $V' = (h, k - a)$
- Focos: $F = (h, k + c)$ $F' = (h, k - c)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Lado recto: $lr = 2b^2/a$

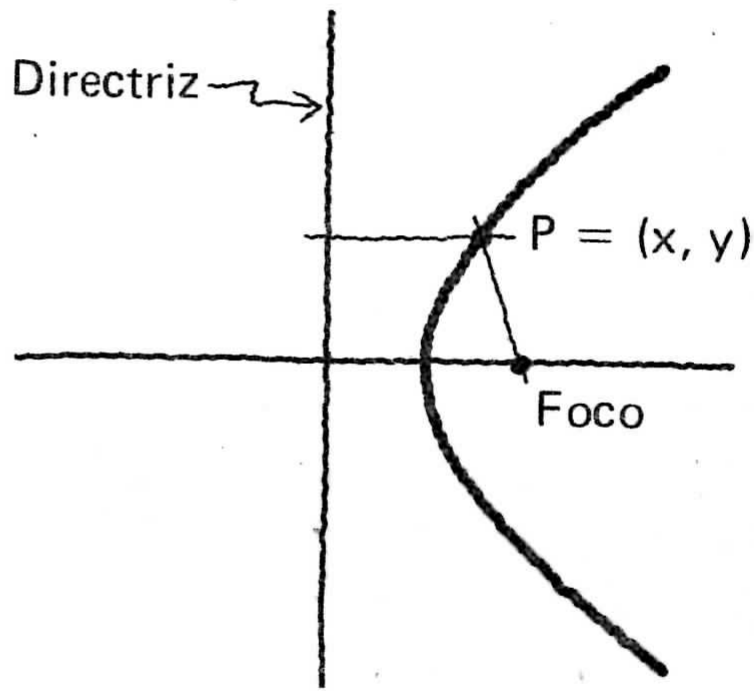


- Ecuaciones de las asíntotas: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

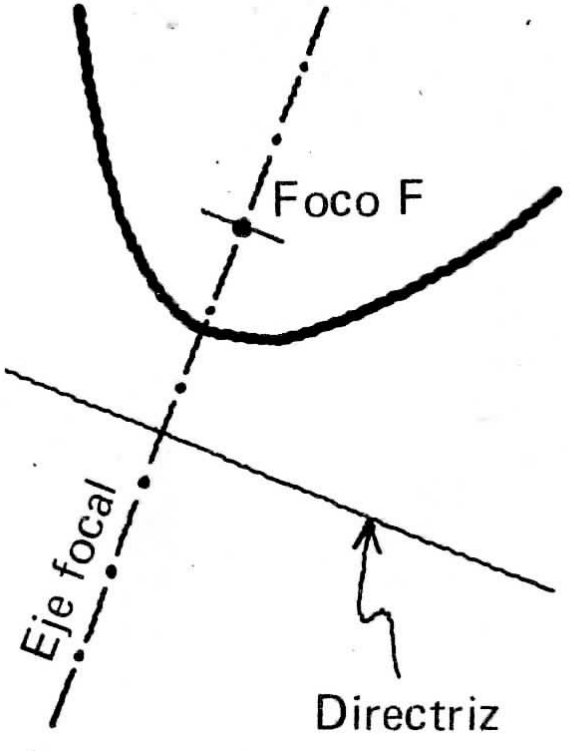
6. La parábola

Parábola

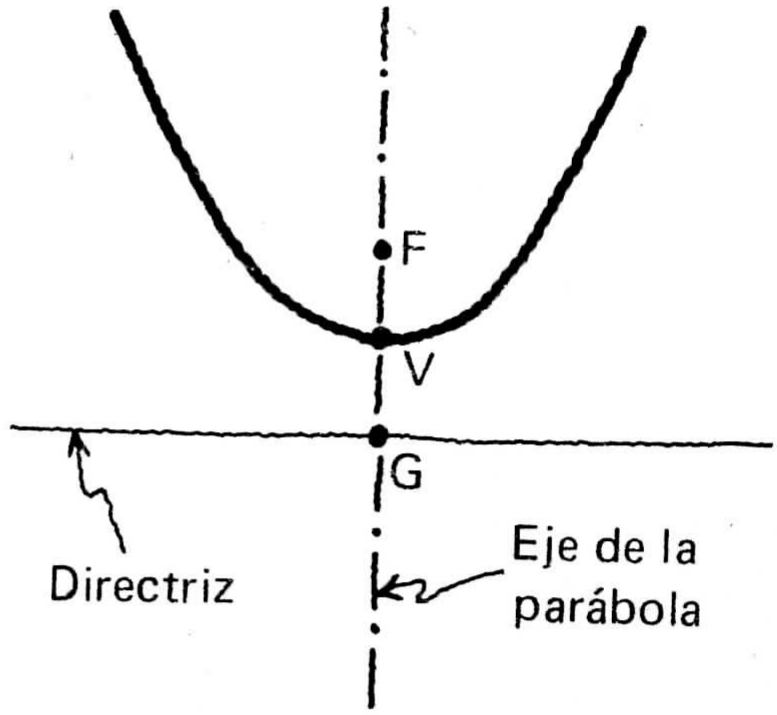
es el conjunto de puntos
en el plano
que equidistan de un punto fijo
llamado *foco*
y
de una recta fija
llamada *directriz.*



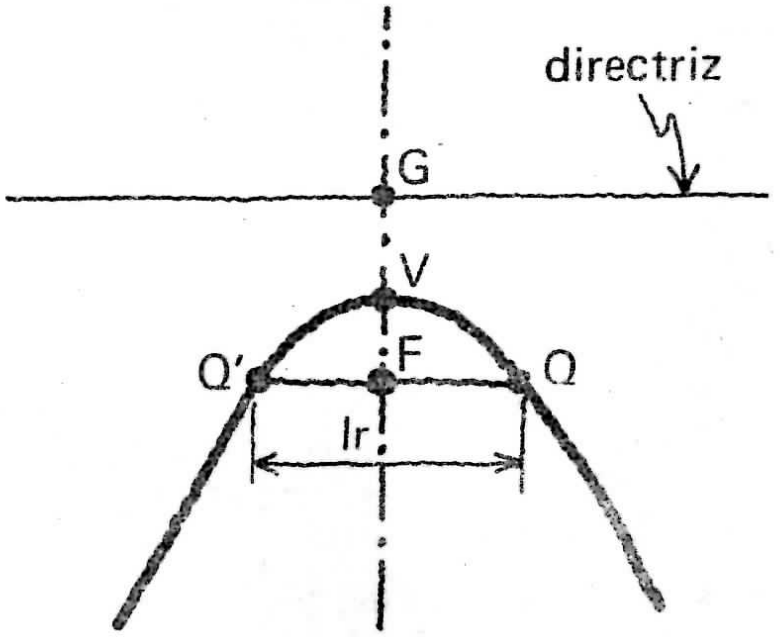
A la recta
que pasa por el foco
y
es perpendicular
a la directriz
se le llama
eje focal
o simplemente
eje de la parábola.



Si **G** es la intersección
del eje de la parábola
y la directriz
y
F es el foco de la parábola,
al punto medio
del segmento $\overline{FG}$
le llamamos
vértice de la parábola
y lo denotamos con **V.**



A la cuerda $\overline{QQ'}$
que contiene al foco
y es perpendicular
al eje
le llamamos
lado recto
o
ancho focal
y la denotamos con **lr.**

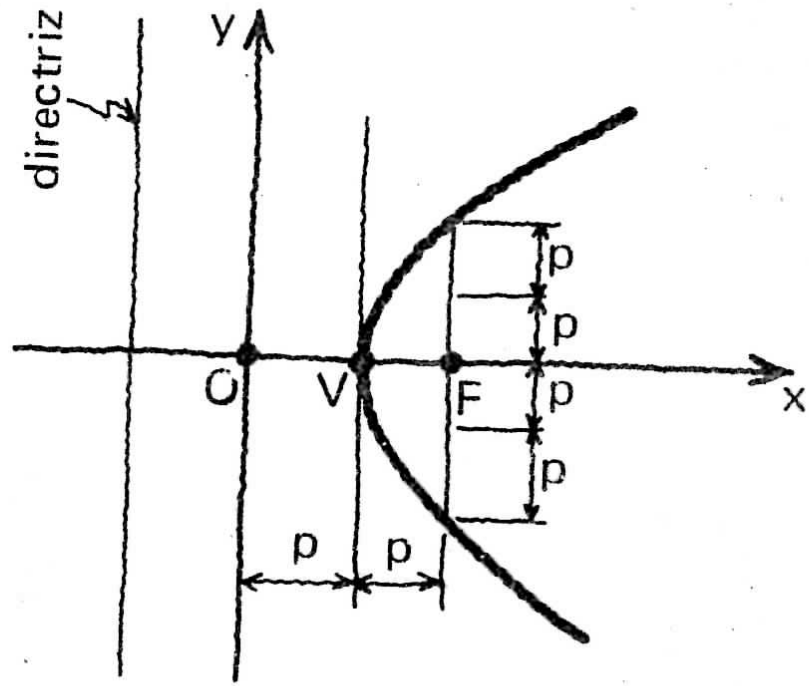


Si denotamos con **p,**
la distancia no dirigida
del vértice al foco
o
del vértice a la directriz,
el ancho focal o lado recto
es igual a **4p.**

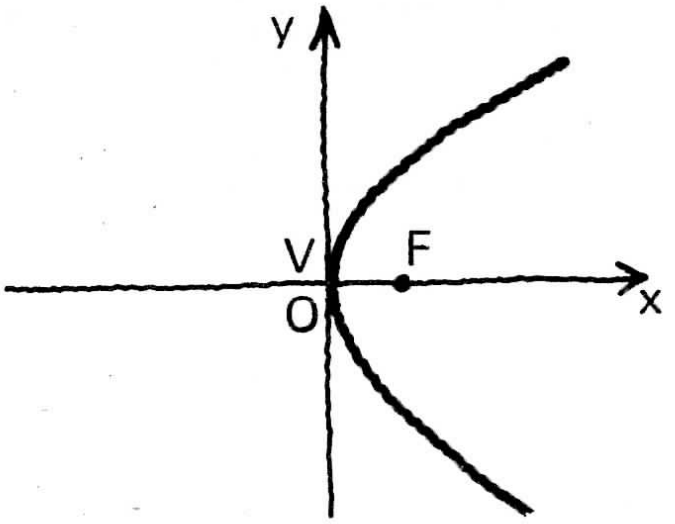
Es decir que:

$$\boxed{lr = 4p}$$

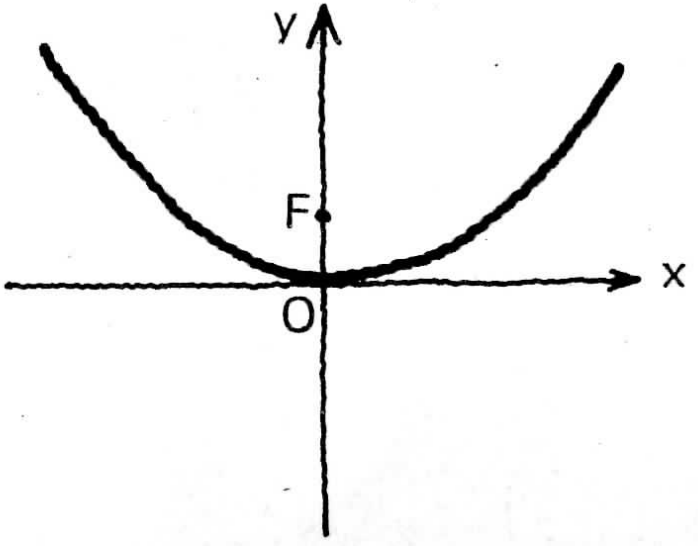
$p \in \mathbb{R}^+$



Si el eje de una parábola
es paralelo a (o coincide con)
el eje de las x,
decimos que
la
parábola es **horizontal.**



Si el eje es paralelo a
(o coincide con)
el eje de las y,
la **parábola** es **vertical.**



Ecuación de una parábola horizontal
con vértice en el origen
y "abierta a la derecha":

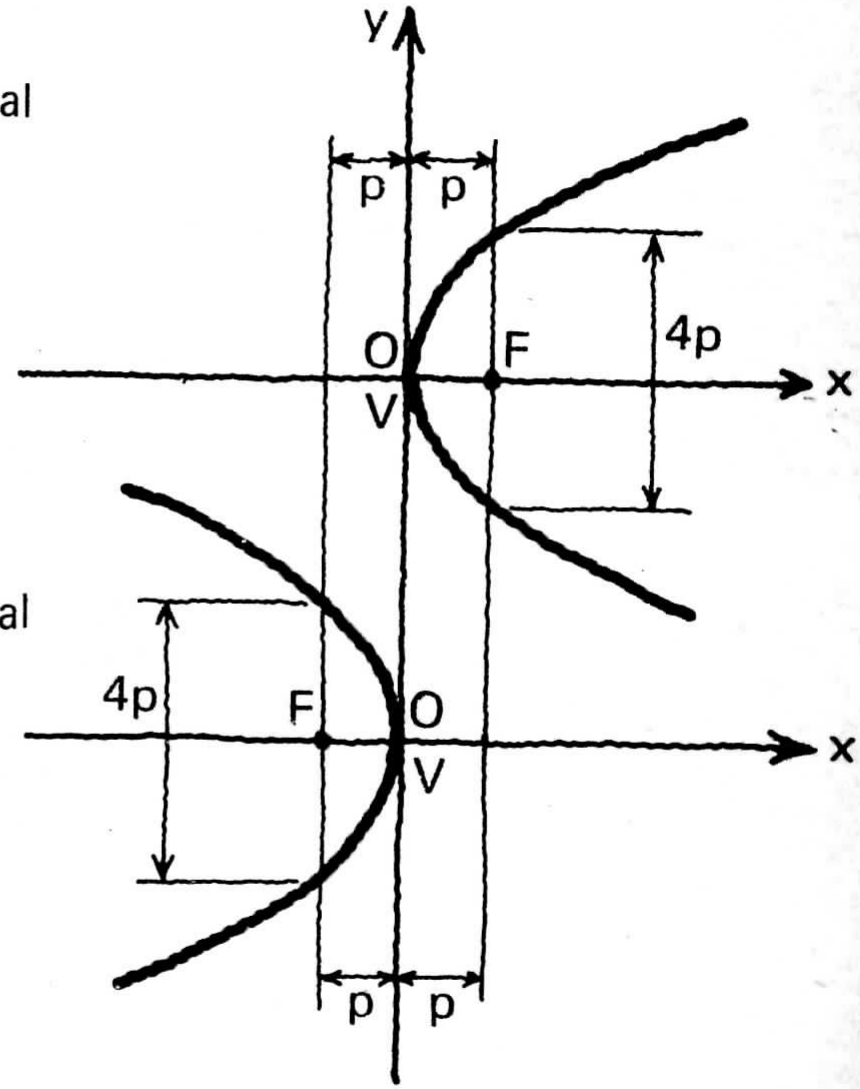
$$\boxed{y^2 = 4px}$$

$p \in \mathbb{R}^+$

Ecuación de una parábola horizontal
con vértice en el origen
y "abierta a la izquierda":

$$\boxed{y^2 = -4px}$$

$p \in \mathbb{R}^+$



Ecuación de una parábola vertical con vértice en el origen y "abierta hacia arriba":

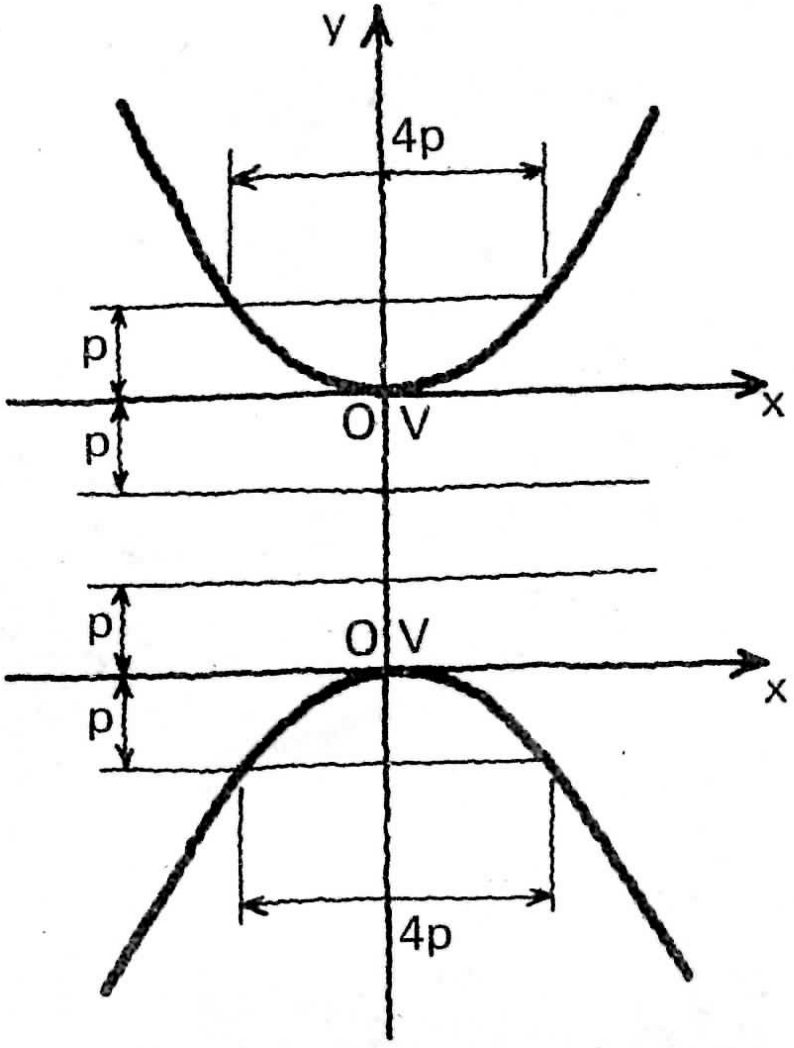
$$\boxed{x^2 = 4py}$$

$p \in \mathbb{R}^+$

Ecuación de una parábola vertical con vértice en el origen y "abierta hacia abajo":

$$\boxed{x^2 = -4py}$$

$p \in \mathbb{R}^+$



- Ecuación de una parábola horizontal con vértice en (h, k) y "abierta a la derecha":

$$\boxed{(y - k)^2 = 4p\,(x - h)}$$

$h, k \in \mathbb{R} \wedge p \in \mathbb{R}^+$

- Ecuación de una parábola horizontal con vértice en (h, k) y "abierta a la izquierda":

$$\boxed{(y - k)^2 = -\,4p(x - h)}$$

$h, k \in \mathbb{R} \wedge p \in \mathbb{R}^+$

- **p** es la distancia del vértice al foco o del vértice a la directriz
- **4p** es el ancho focal o lado recto.

- Ecuación de una parábola vertical con vértice en (h, k) y "abierta hacia arriba":

$$\boxed{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$$

$h, k \in \mathcal{R} \wedge p \in \mathcal{R}^+$

- Ecuación de una parábola vertical con vértice en (h, k) y "abierta hacia abajo":

$$\boxed{(x - h)^2 = -4p(y - k)}$$

$h, k \in \mathcal{R} \wedge p \in \mathcal{R}^+$

- **p** es la distancia del vértice al foco o del vértice a la directriz.

Una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$A, C, D, E, F \in \mathcal{R} \wedge (A = 0 \veebar C = 0)$

puede representar:

- una parábola con su eje paralelo a alguno de los ejes coordenados
- un par de rectas paralelas
- una recta

  } parábolas degeneradas

  o
- ningún conjunto de puntos en el plano (ϕ).

Para que una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$A, C. D, E, F \in \mathbb{R}$

represente una parábola,
se requiere que $\boxed{A = 0 \veebar C = 0}$ (*)

- Si $A = 0$ la parábola representada es **horizontal**
- Si $C = 0$ la parábola representada es **vertical**

(*) $A = 0 \veebar C = 0$ es una disyunción exclusiva y debe interpretarse como: "$A = 0$ o $C = 0$, pero no $A = C = 0$".

Ejemplo de transformación de una ecuación ordinaria de una parábola en una ecuación general.

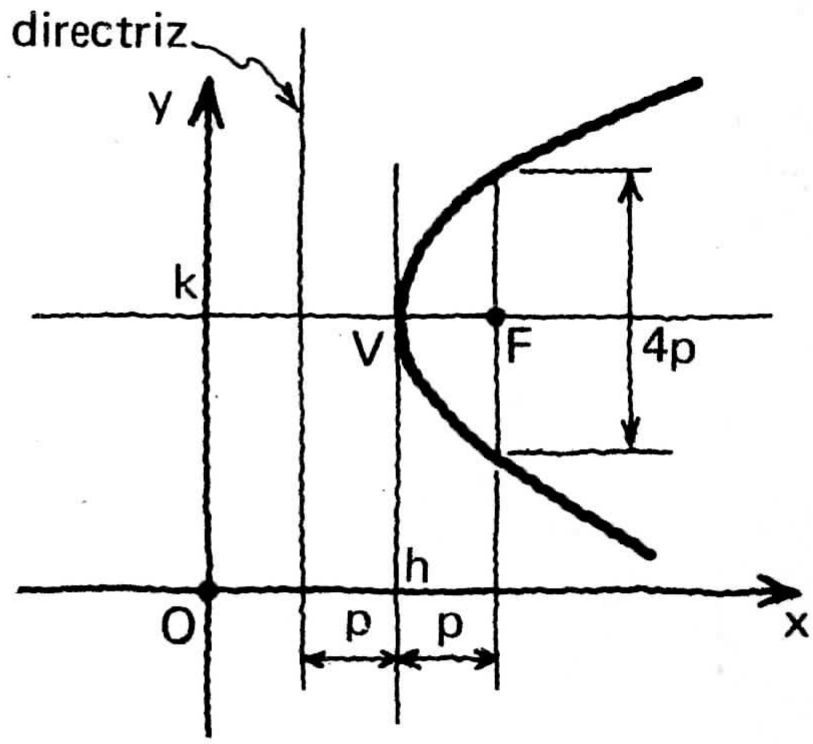
- Estado inicial → $(y - 3)^2 = 6(x - 4)$
- Estado intermedio 1 → $(y - 3)^2 - 6(x - 4) = 0$
- Estado intermedio 2 → $y^2 - 6y + 9 - 6x + 24 = 0$
- Estado final → $y^2 - 6x - 6y + 33 = 0$

Ejemplo de transformación de una ecuación general en la ecuación ordinaria de una parábola.

- Estado inicial → $y^2 - 8x + 10y + 41 = 0$
- Estado intermedio 1 $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$
- Estado intermedio 2 $y^2 + 10y + 25 - 8x + 16 = 0$
- Estado intermedio 3 $y^2 + 10y + 25 = 8x - 16$
- Estado intermedio 4 $(y + 5)^2 = 8(x - 2)$
- Estado final → $(y + 5)^2 = 8(x - 2)$

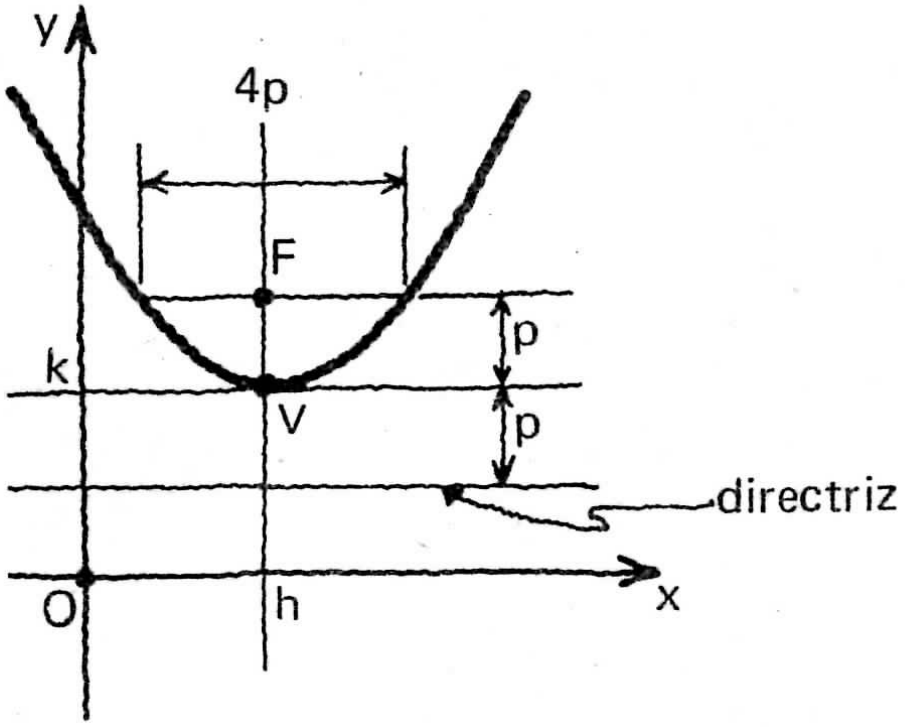
Elementos de una parábola horizontal con vértice en (h, k).

- Vértice V = (h, k)
- Parámetro **p**
- Ecuación del eje: y = k
- Foco, si la parábola está abierta a la derecha:
  F = (h + p, k)
  si la parábola está abierta a la izquierda:
  F = (h – p, k)
- Lado recto: lr = 4p



Elementos de una parábola vertical con vértice en (h, k)

- Vértice V = (h, k)
- Parámetro **p**
- Ecuación del eje: x = h
- Foco, si la parábola está abierta hacia arriba:
  F = (h, k + p)
  si la parábola está abierta hacia abajo:
  F = (h, k − p)
- Lado recto: lr = 4p.

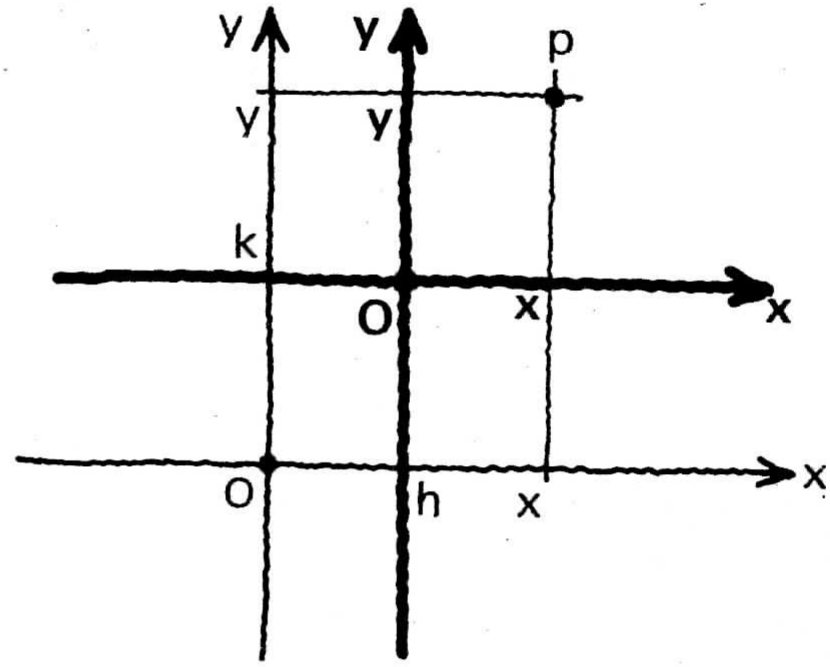


7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado

Ecuaciones de traslación de ejes.

$$x = \mathbf{x} + h$$

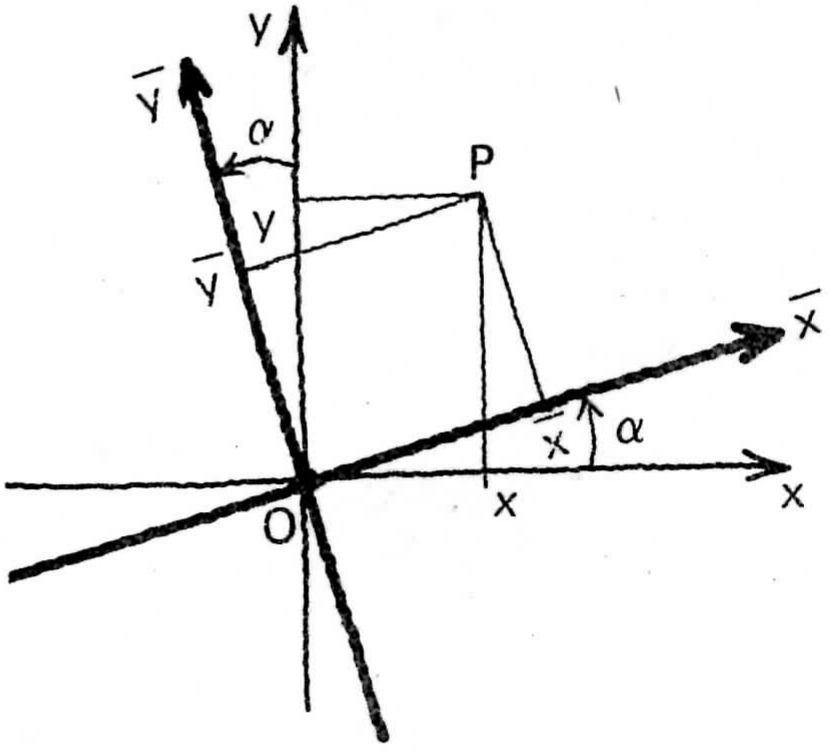
$$y = \mathbf{y} + k$$



Ecuaciones de rotación de ejes.

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$$

$$y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$



- **Hipérbola rectangular** en el 1.° y 3.er cuadrantes:

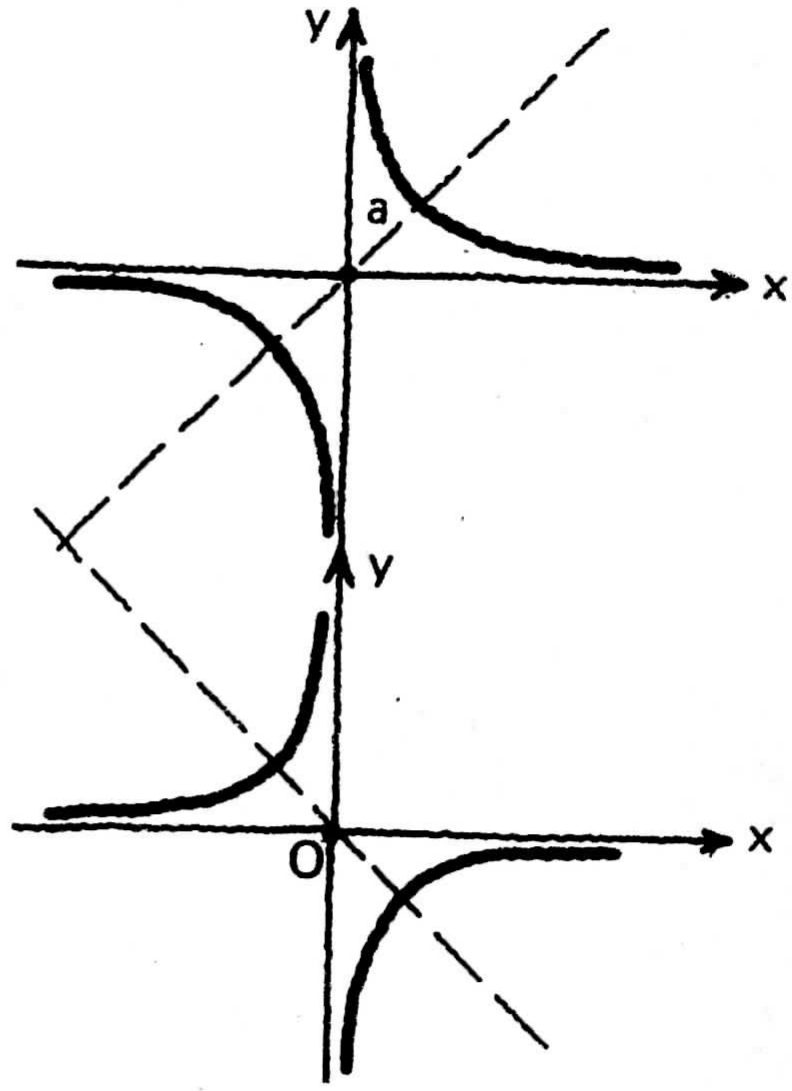
$$\boxed{xy = k}$$

$$k = \frac{a^2}{2}$$

- **Hipérbola rectangular** en el 2.° y 4.° cuadrantes:

$$\boxed{xy = k}$$

$$k = -\frac{a^2}{2}$$



La medida del ángulo de rotación requerida para hacer desaparecer el término rectangular Bxy de la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede obtenerse de:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

Una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

con $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{R}$

puede representar:

- una cónica:
  - elipse
  - hipérbola
  - parábola
- una cónica degenerada
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano (ϕ)

La expresión $\boxed{B^2 - 4AC}$

se denomina **discriminante de la ecuación:**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y determina
la naturaleza del conjunto de puntos representado
por la ecuación.

Ver cuadros siguientes.

Si en la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$B^2 - 4AC < 0$$

la ecuación representa
- una **elipse**
- una elipse degenerada
- o
- ϕ

Si en la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\mathbf{B^2 - 4AC > 0}$$

la ecuación representa
- una **hipérbola**
- o
- una hipérbola degenerada

Si en la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

la ecuación representa

- una **parábola**
- una parábola degenerada

o

- ϕ

Si en la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B = 0$

podemos escribirla así:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

La ecuación incompleta:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

representa
- una **elipse** con sus ejes paralelos a los ejes coordenados
- una elipse degenerada

o

- ϕ

si $AC > 0$, es decir, si A y C tienen el mismo signo.

La ecuación incompleta:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

representa
- una **circunferencia** (caso particular de elipse)
- un punto (circunferencia degenerada)
  o
- ϕ

si $AC > 0$ y además $A = C$,
y puede ser escrita en la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0}$$

La ecuación incompleta:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

representa
- una **hipérbola** con sus ejes paralelos a los ejes coordenados
  o
- una hipérbola degenerada (par de rectas concurrentes).

si $AC < 0$, es decir: A y C tienen signos contrarios.

La ecuación incompleta:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

representa
- una **parábola** con su eje paralelo a alguno de los ejes coordenados
- una parábola degenerada
- una recta

o

- ϕ

si **AC = 0,** es decir si: $A = 0 \vee C = 0$

8. Relaciones y lugares geométricos

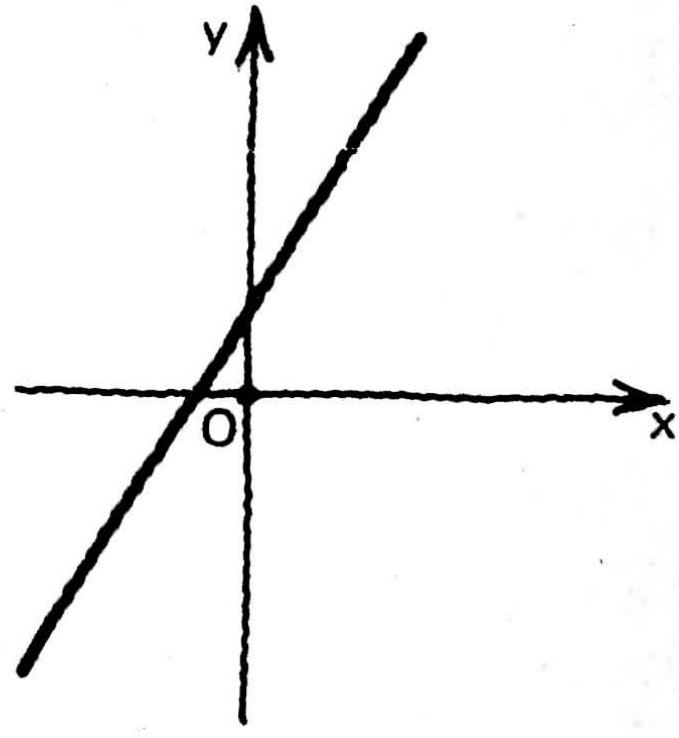
Se suele dar el nombre de

lugar geométrico

de una ecuación
a la gráfica cartesiana de la ecuación.
Por ejemplo:
el lugar geométrico de la ecuación

$\boxed{y = 2x + 1}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

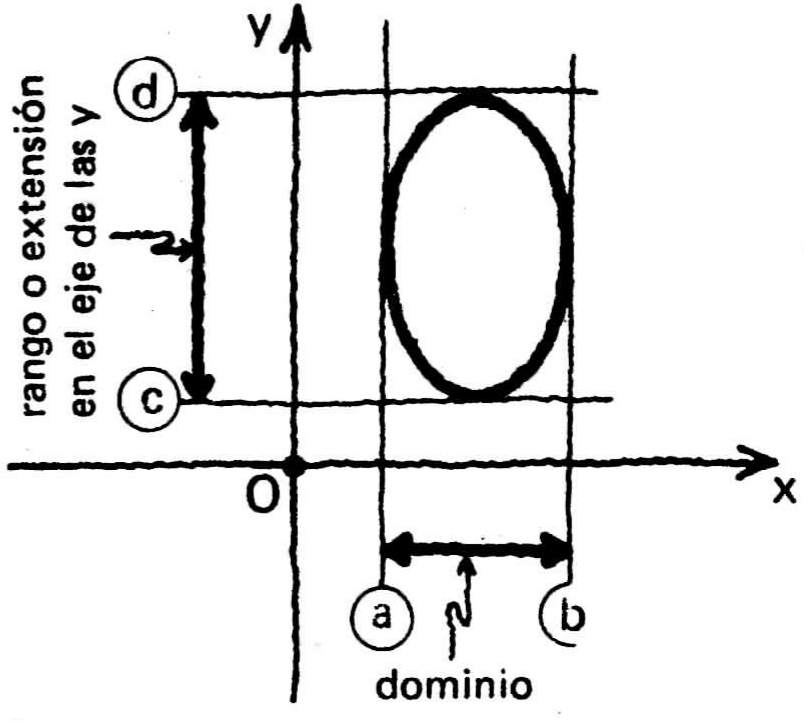
es la recta representada.



El **dominio**
y el **rango**
de una relación
definen la

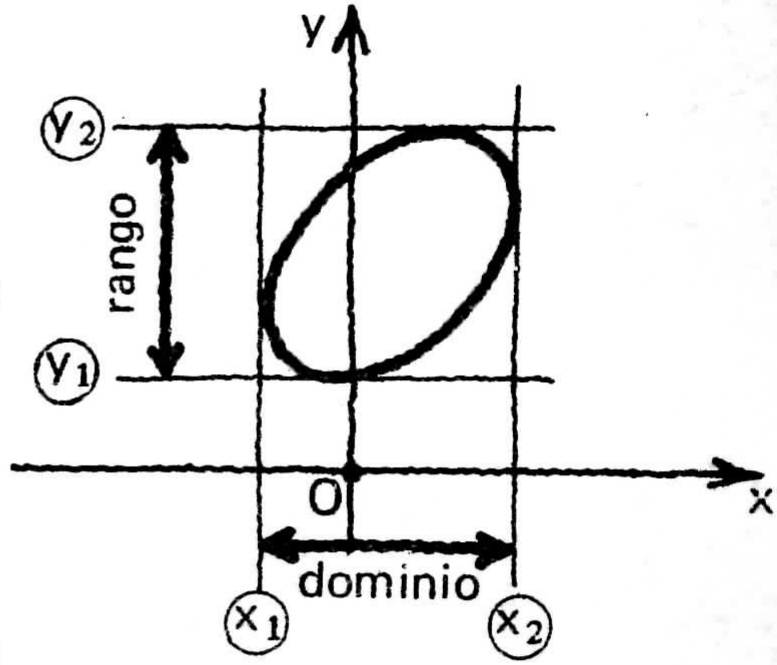
extensión

de la curva o lugar geométrico
representado.
Así,



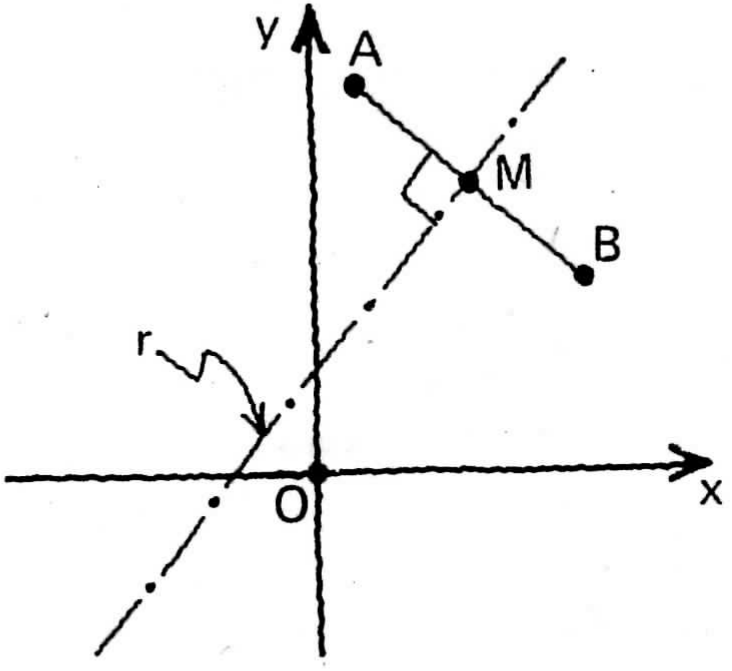
- La extensión de la curva mostrada, a lo largo del eje x, es el intervalo [a, b].
- Su extensión a lo largo del eje y es [c, d]

- Para encontrar el **dominio** de una relación, se resuelve para **y** la ecuación que la define y se determina el conjunto de valores **de x** para los que **y** existe en $\mathcal{R}$.
- Para encontrar el **rango** de la relación, se resuelve para **x** dicha ecuación, y se determina el conjunto de valores de **y** para los que **x** existe en $\mathcal{R}$.



Dos puntos A y B
son **simétricos**
con respecto a una recta r

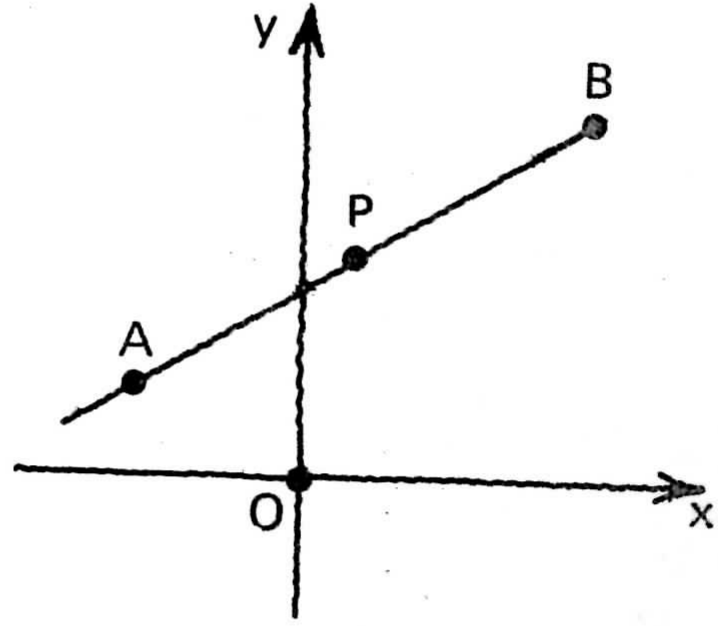
si, y sólo si
la recta r
es mediatriz
del segmento $\overline{AB}$.



Dos puntos A y B
son **simétricos**
con respecto a un
tercer punto P

sí, y sólo si
P es el punto medio

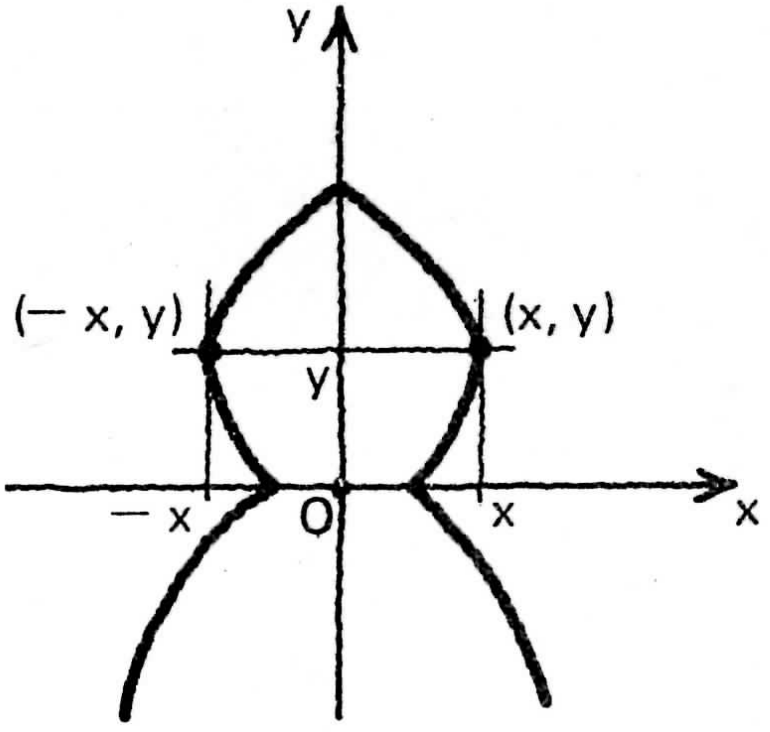
del segmento $\overline{AB}$.



Una curva es

simétrica con respecto al eje y

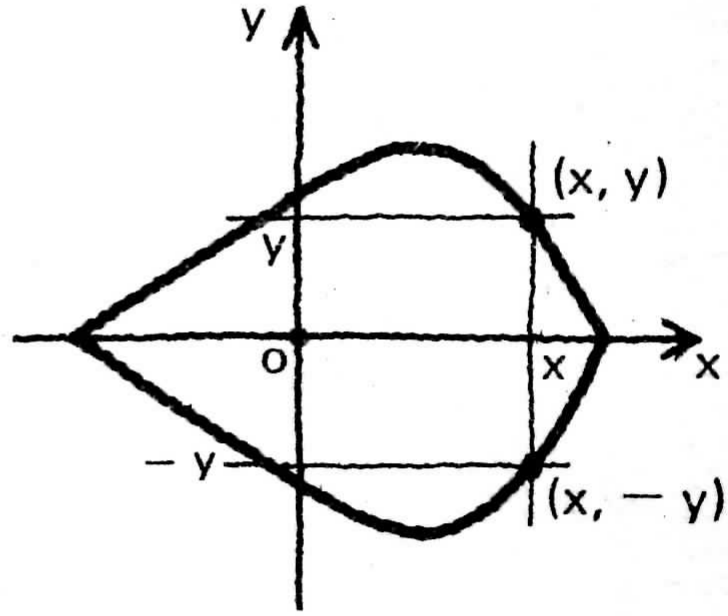
si, y sólo si
perteneciendo un punto (x, y)
a la curva,
el punto (−x, y)
también pertenece a ella.



Una curva es

simétrica con respecto al eje x

si, y sólo si
perteneciendo un punto (x, y)
a la curva,
el punto (x, − y)
también pertenece a ella.

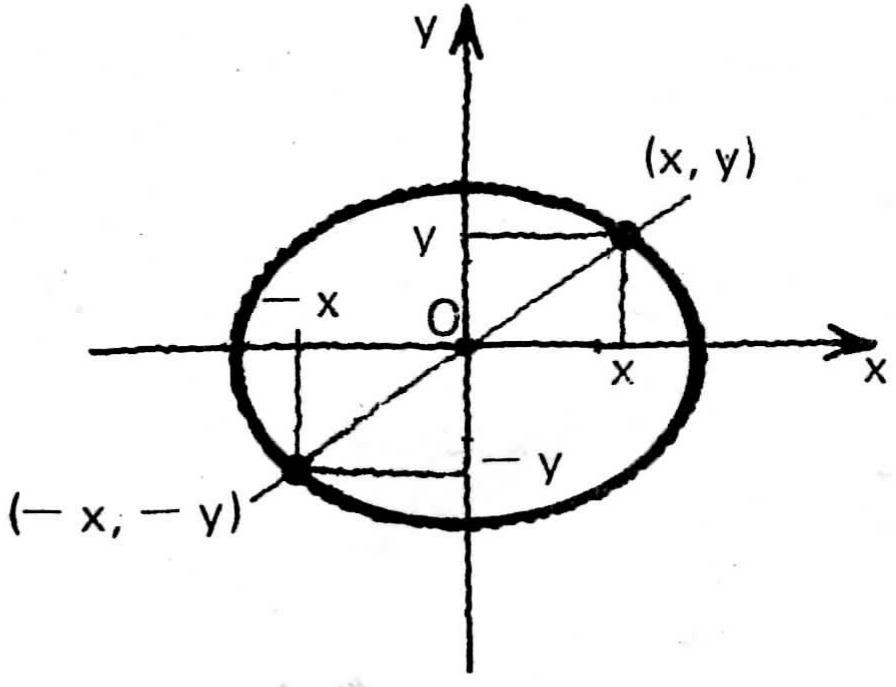


Una curva es

simétrica con respecto al origen

si, y sólo si

perteneciendo a la curva un punto (x, y), el punto (− x, − y) también pertenece a ella.



Si en una ecuación en x e y

sustituimos x por (– x)

y
obtenemos una ecuación equivalente,
entonces
la curva representada por la ecuación es
simétrica con respecto al eje y.

Si en una ecuación en x e y

sustituimos y por (– y)

y
obtenemos una ecuación equivalente,
entonces
la curva representada por la
ecuación es

simétrica con respecho al eje x.

Si en una ecuación en x e y

sustituimos x por (– x) e y por (– y)

y obtenemos una ecuación equivalente,
entonces
la curva representada por la ecuación es

simétrica con respecto al origen.

Para obtener la curva
representada por una ecuación de dos variables,
$y = f(x)$ $x, y \in \mathbb{R}$
podemos utilizar el procedimiento de

tabulación,

seleccionando algunos elementos **(x)** del dominio
y
calculando sus correspondientes imágenes **(y)**,
con lo cual tenemos un conjunto de pares ordenados **(x, y)**,
que al ser representados en el plano cartesiano y
unidos por una línea fluida, nos dan una idea de la curva
requerida.

Para el trazo de una curva,
será de gran ayuda conocer, siempre que sea posible:

1. la **extensión de la curva** a lo largo de cada uno de los ejes coordenados
2. la **simetría** o no-simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen
3. las **intersecciones** de la curva con los ejes coordenados

El *primer miembro*
de algunas ecuaciones en las que
el segundo miembro es igual a cero,
puede ser *descompuesto en factores,*
obteniéndose así
un lugar geométrico constituido por
dos o más curvas,
cada una correspondiendo
a uno de los factores.

Ver un ejemplo en el cuadro siguiente.

La ecuación $\boxed{y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0}$

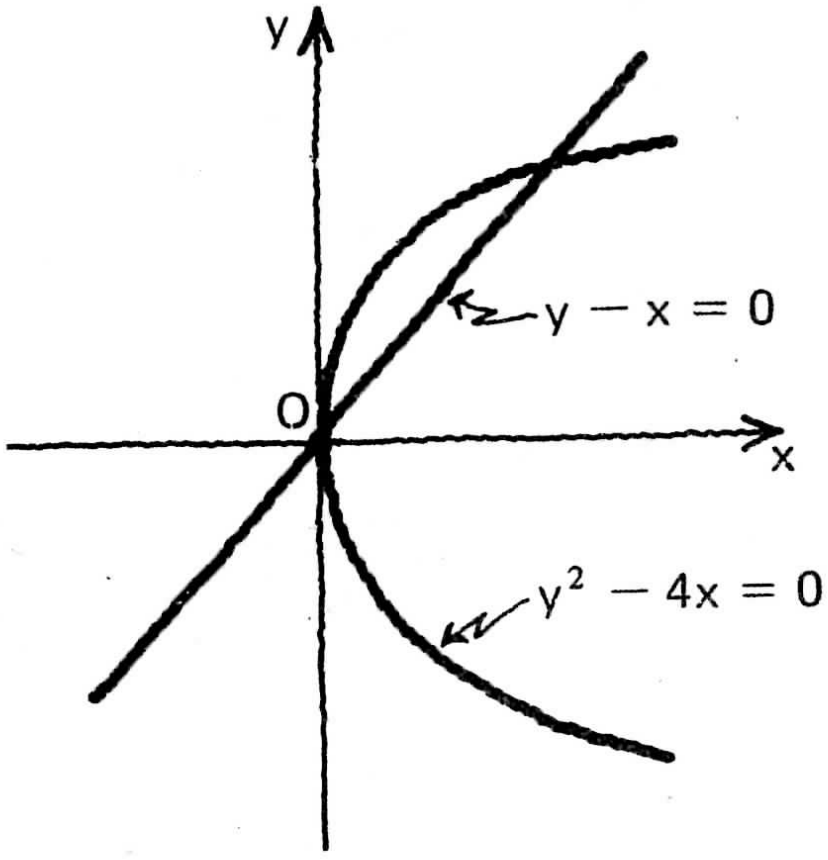
puede ser expresado así: $\boxed{(y - x)(y^2 - 4x) = 0}$

y es equivalente el sistema disyuntivo $\boxed{y - x = 0} \vee \boxed{y^2 - 4x = 0}$

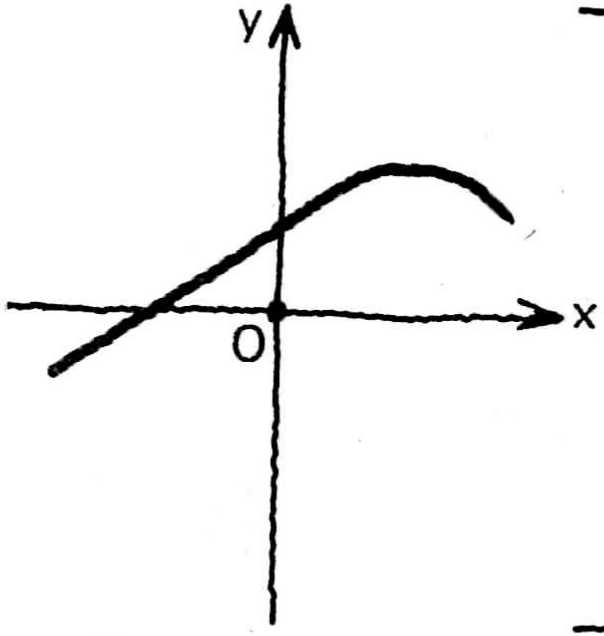
Trazando las curvas correspondientes a cada una de las ecuaciones obtenemos el lugar geométrico representado por la ecuación dada.

Ver gráfica en el cuadro siguiente.

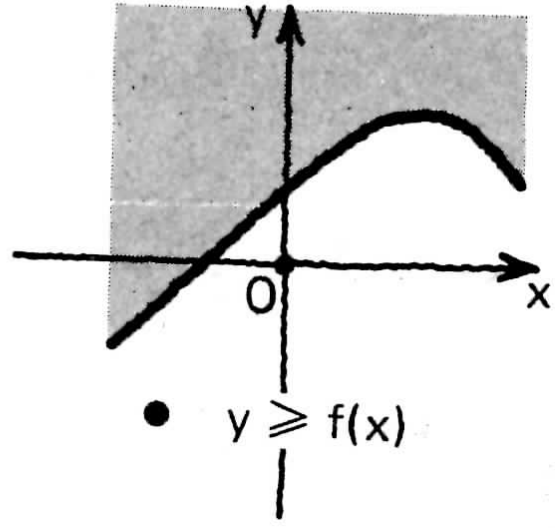
Gráfica de
$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$
o de
$(y - x)(y^2 - 4x) = 0$
o de
$y - x = 0 \vee y^2 - 4x = 0$



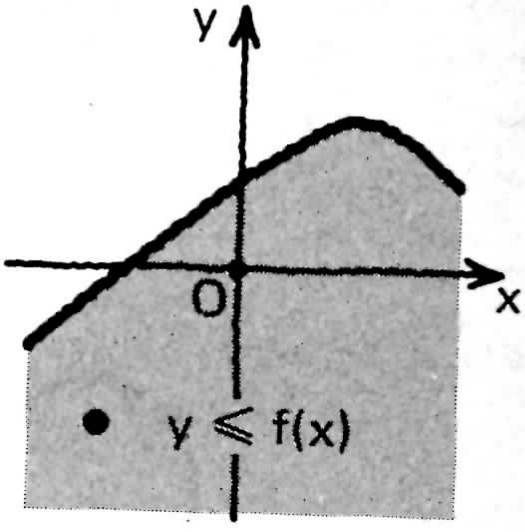
A partir de esta gráfica de $y = f(x)$



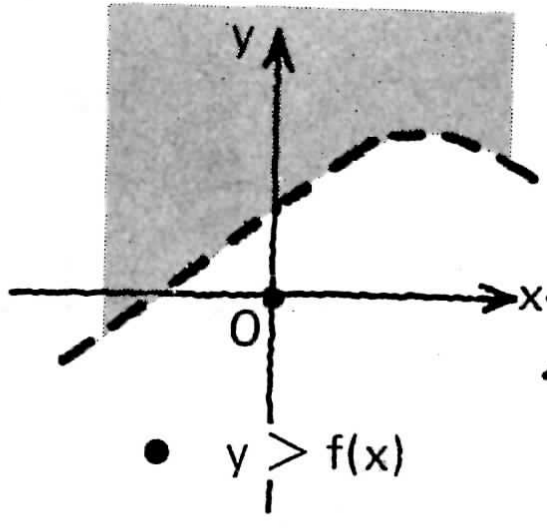
es fácil obtener las gráficas de las siguientes desigualdades:



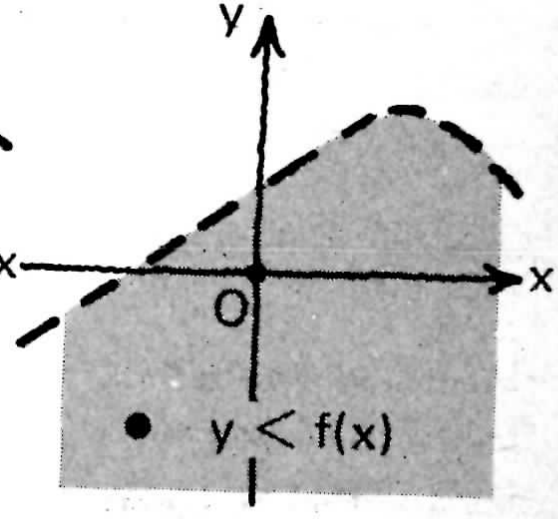
• $y \geqslant f(x)$



• $y \leqslant f(x)$



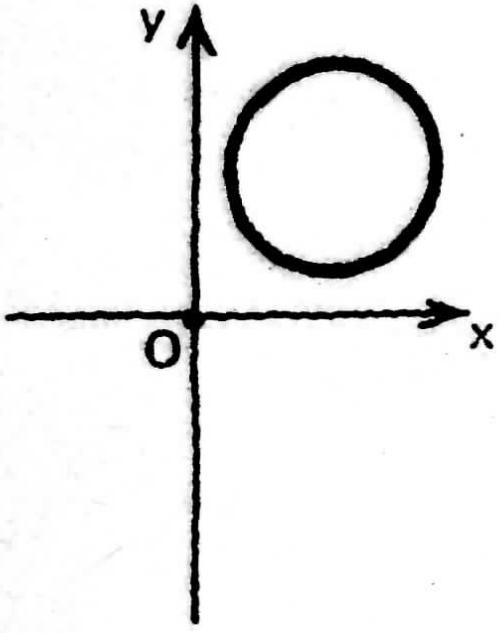
• $y > f(x)$



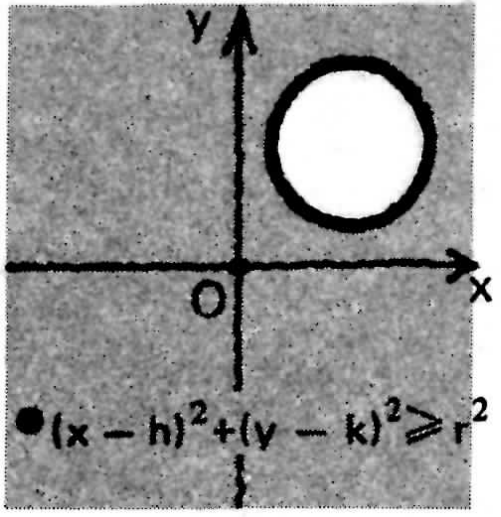
• $y < f(x)$

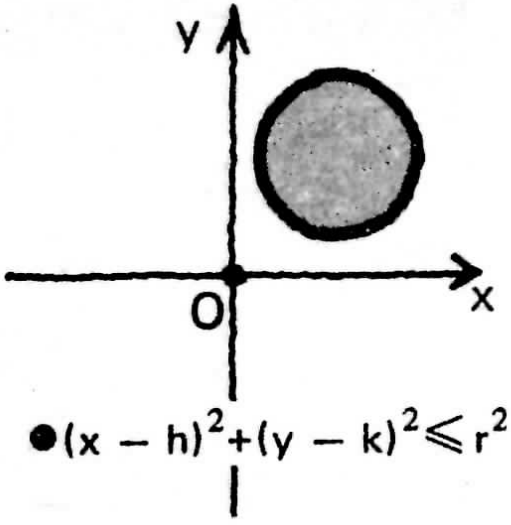
A partir de esta gráfica para la ecuación

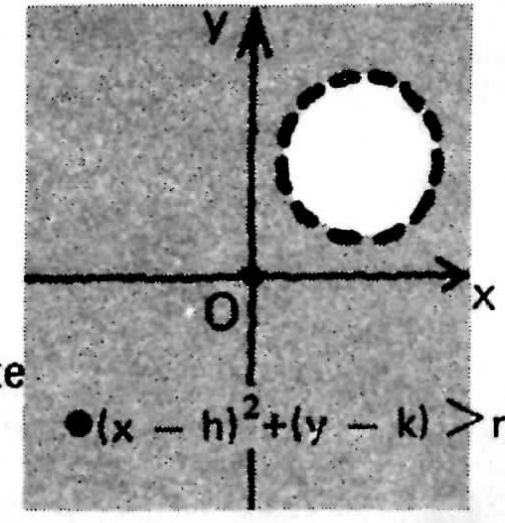
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

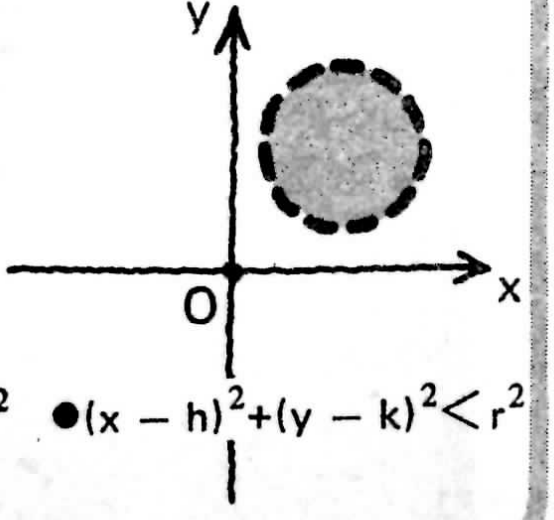


podemos obtener fácilmente las gráficas de las desigualdades siguientes:



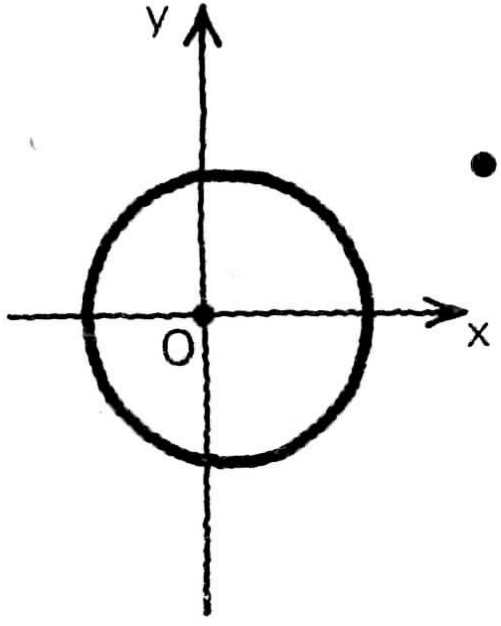




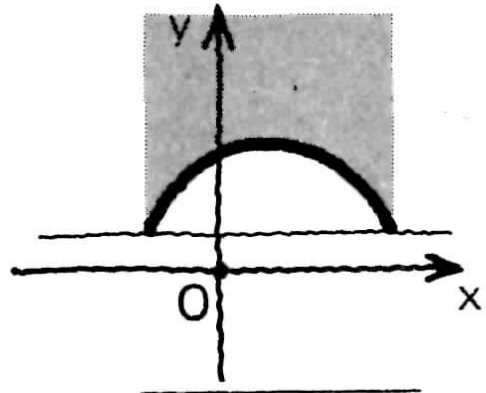


A partir de esta gráfica para la ecuación

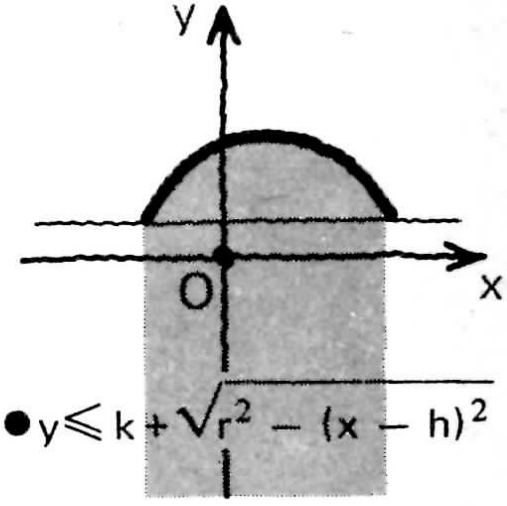
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



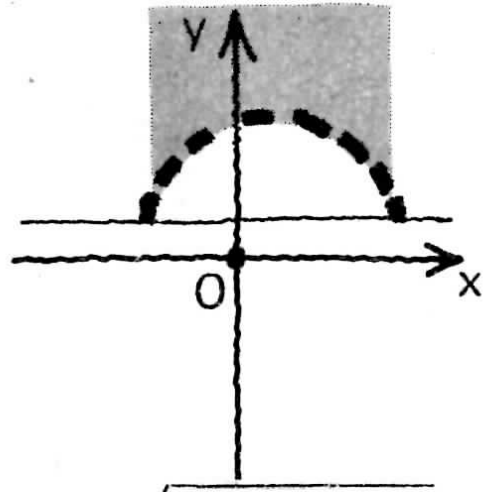
podemos obtener las gráficas de las siguientes desigualdades:



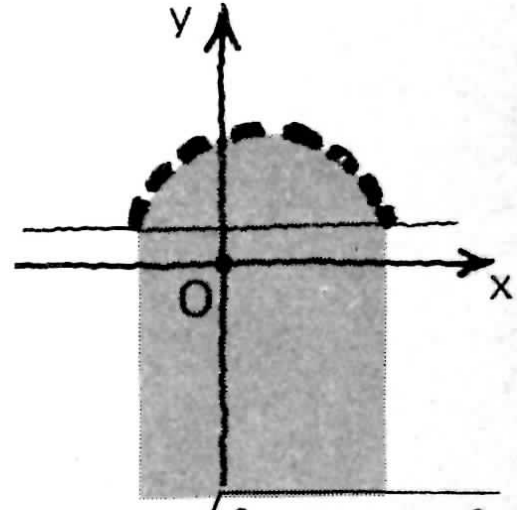
● $y \geqslant k + \sqrt{r^2 - (x - h)^2}$



● $y \leqslant k + \sqrt{r^2 - (x - h)^2}$



● $y > k + \sqrt{r^2 - (x - h)^2}$



● $y < k + \sqrt{r^2 - (x - h)^2}$

Esta obra se terminó de imprimir
*el día 6 de enero de 1986,**
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 85

Memos de la Serie Módulos de Matemáticas

MEMO 1. Algebra, estructura y operaciones

MEMO 2. Algebra. Modelos

MEMO 3. Nociones de lógica matemática

MEMO 4. Geometría euclidiana

MEMO 5. Trigonometría

MEMO 6. Geometría analítica

MEMO 7. Cálculo diferencial

MEMO 8. Cálculo integral

Este MEMO 6 de la serie Módulos de matemáticas corresponde al Bloque 6 de dicha serie y contiene el resumen de los temas siguientes.

MEMO 6

GEOMETRÍA ANALÍTICA

1- Introducción a la geometría analítica
2- La recta
3- La circunferencia
4- La elipse
5- La hipérbola
6- La parábola
7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8- Relaciones y lugares geométricos